



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

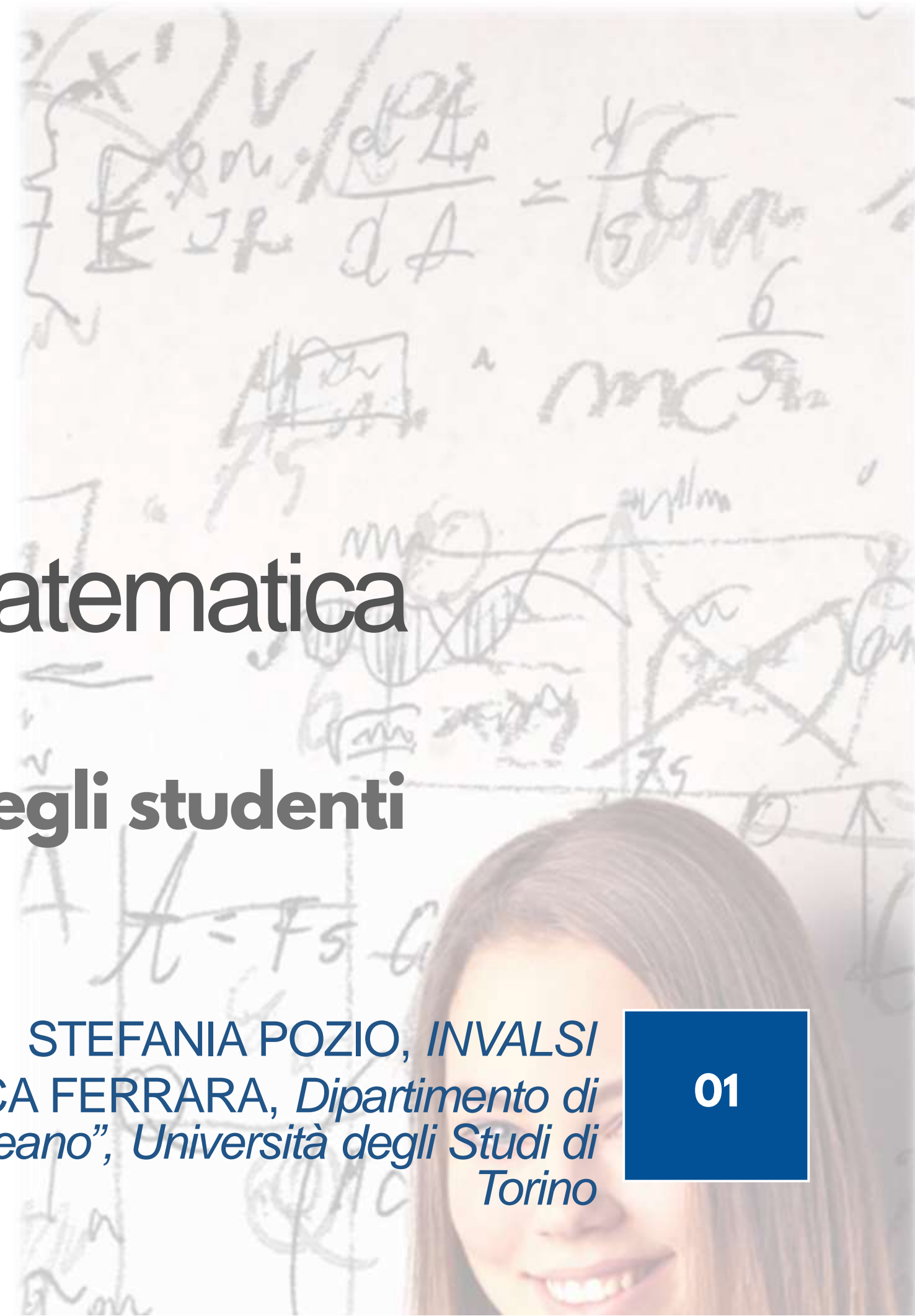
Valutazione e didattica della matematica

Le risposte errate e i livelli di abilità degli studenti

6 OTTOBRE 2020

STEFANIA POZIO, INVALSI
FRANCESCA FERRARA, Dipartimento di
Matematica "G. Peano", Università degli Studi di
Torino

01





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

FOCUS DEL WEBINAR

Analisi delle RISPOSTE ERRATE di studenti di grado 8 a un quesito di modellizzazione algebrica della prova nazionale CBT del 2018

Suddivisione delle risposte errate in approcci diversi (*ROUTE*) alla risoluzione del compito

RELAZIONE tra le route e i LIVELLI di abilità degli studenti

VALUTAZIONE & DIDATTICA:
quali legami, quale intreccio



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

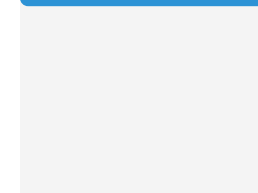
03

Dal 2018 passaggio al CBT



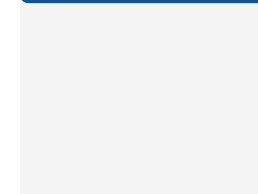
**Da un unico fascicolo a
una banca di quesiti**

Dal test cartaceo a quello svolto al computer (8, 10, 13)



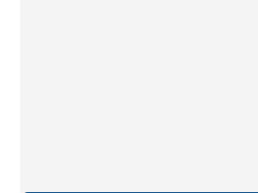
**Ogni domanda è presente
in una o più forme**

Forme multiple del test (un quesito non arriva a tutti)



**Accesso alle risposte degli
studenti a domande aperte**

Correzione centralizzata (esperti INVALSI)



**Possibilità di associare a
ogni studente il suo livello
di abilità**



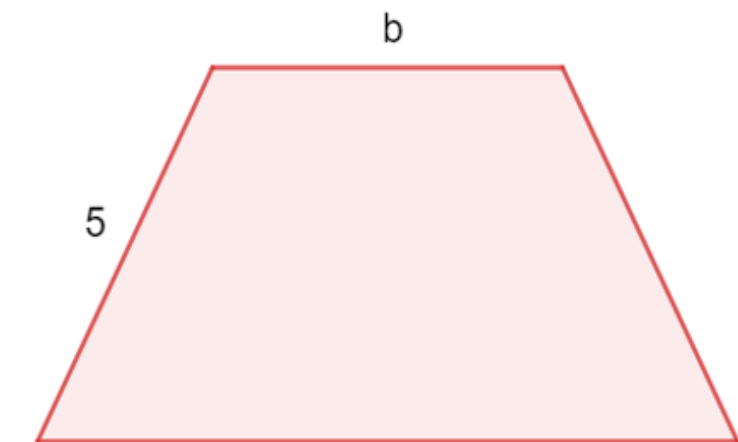
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

Prova nazionale CBT 2018

- Ambito: Relazioni e funzioni
Dimensione: Conoscere
- Scopo della domanda: Scrivere una formula che esprime una relazione in contesto geometrico

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

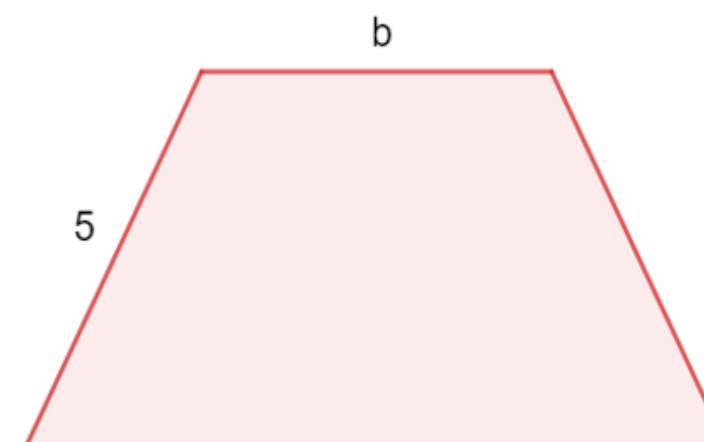
Risposta: $p =$

Il quesito

Prova nazionale CBT 2018

- **Ambito:** Relazioni e funzioni
Dimensione: Conoscere
- **Scopo della domanda:** Scrivere una formula che esprime una relazione in contesto geometrico
- **Traguardo:** Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale
Obiettivo: Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

Risposta: $p =$



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Campione
statistico del 2018
31300 studenti

Domanda
somministrata a
4543 studenti

Risposte corrette
1561 studenti

Risposte errate
2147 studenti

Risposte omesse
835 studenti



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

% studenti per livello

	LIVELLO 1	LIVELLO 2	LIVELLO 3	LIVELLO 4	LIVELLO 5
Risposte corrette	1,6%	8%	17,2%	31,6%	41,6%
Risposte errate	22,1%	29,6%	26,9%	14,4%	7%
Risposte mancanti	35,3%	35,4%	20%	7,8%	1,4%



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

% studenti per livello

	LIVELLO 1	LIVELLO 2	LIVELLO 3	LIVELLO 4	LIVELLO 5
Risposte corrette	1,6%	8%	17,2%	31,6%	41,6%
Risposte errate	22,1%	29,6%	26,9%	14,4%	7%
Risposte mancanti	35,3%	35,4%	20%	7,8%	1,4%



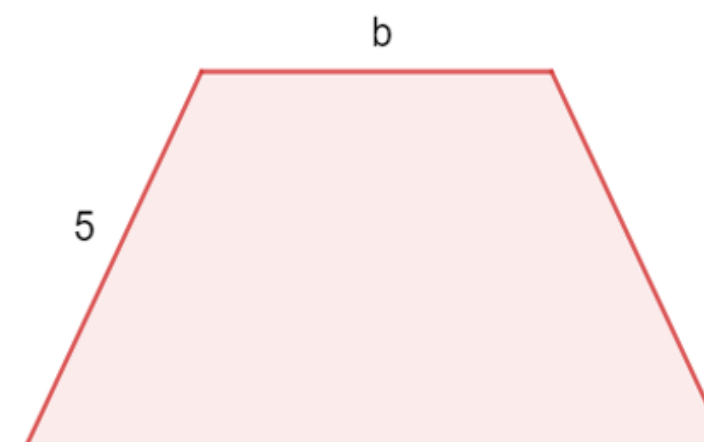
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

(The *formula task*)

- Il quesito è formulato utilizzando diversi registri (parole, figure, simboli) ed è suddiviso in uno *stimolo* iniziale e in un successivo *compito*.

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

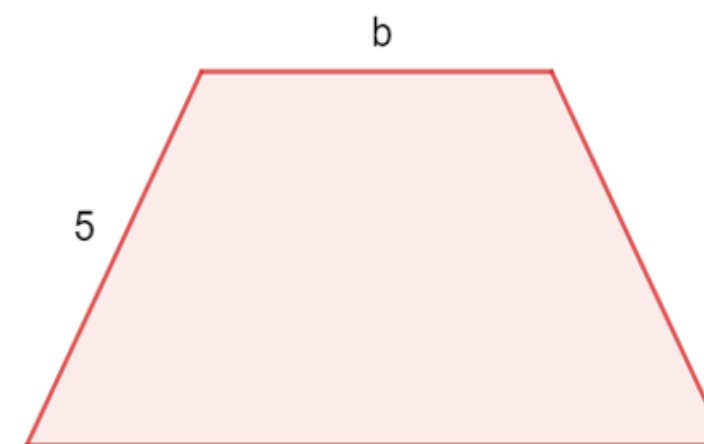
Risposta: $p =$

Il quesito

(The *formula task*)

- Il quesito è formulato utilizzando diversi registri (parole, figure, simboli) ed è suddiviso in uno *stimolo iniziale* e in un successivo *compito*.

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

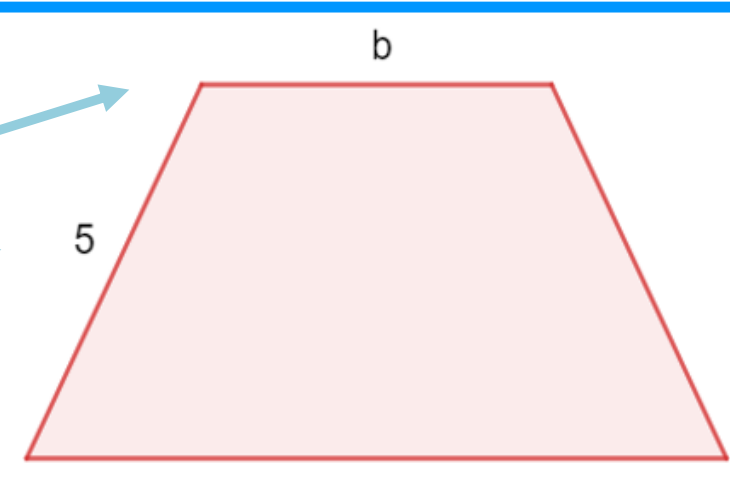
Risposta: $p =$

Il quesito

(The *formula task*)

- Il quesito è formulato utilizzando diversi registri (parole, figure, simboli) ed è suddiviso in uno *stimolo* iniziale e in un successivo *compito*.
- Lo stimolo è fornito principalmente in *forma testuale e figurale*, sebbene compaiano anche numeri e lettere.

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrive una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

Risposta: $p =$



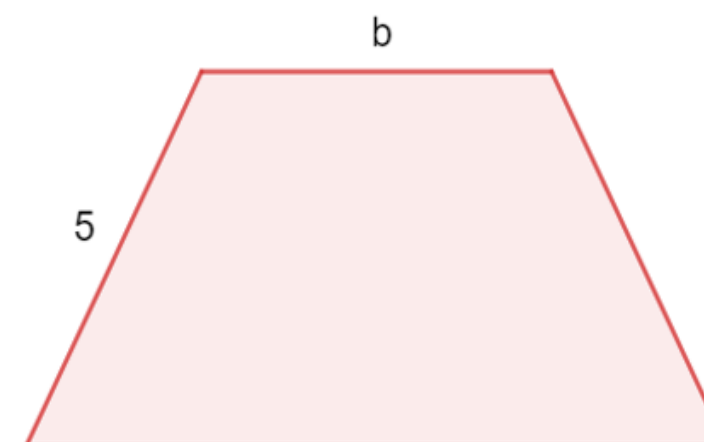
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

(The *formula task*)

- Il quesito è formulato utilizzando diversi registri (parole, figure, simboli) ed è suddiviso in uno *stimolo* iniziale e in un successivo *compito*.
- Lo stimolo è fornito principalmente in forma *testuale* e *figurale*, sebbene compaiano anche numeri e lettere.
- Lo stimolo iniziale nello specifico **esprime la relazione tra le basi a parole**. La figura fornisce le lunghezze del lato obliquo e della base minore.

Nel trapezio isoscele in figura **la base maggiore è doppia della minore.** (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

Risposta: $p =$



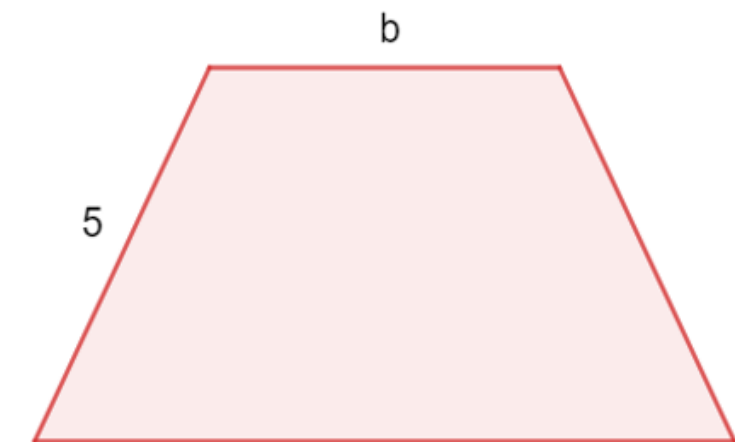
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

(The *formula task*)

- La competenza algebrica richiesta è significativa: la figura, il testo, il numero e la lettera devono essere *collegati* gli uni con gli altri.

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

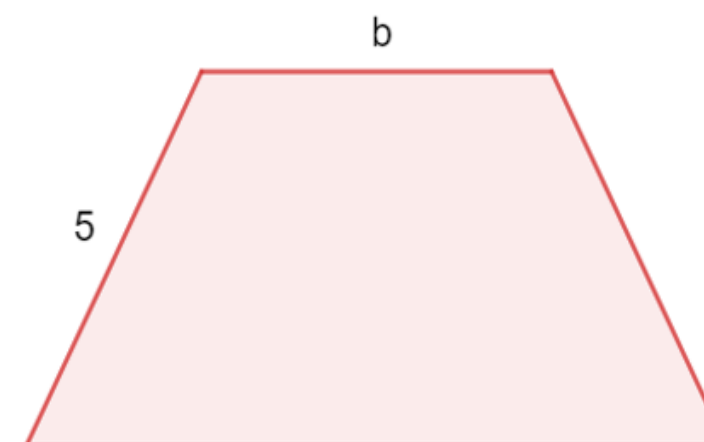
Risposta: $p =$

Il quesito

(The *formula task*)

- La competenza algebrica richiesta è significativa: la figura, il testo, il numero e la lettera devono essere *collegati* gli uni con gli altri.
- Il quesito chiede di scrivere **una formula** che esprima il **perimetro** di una semplice figura geometrica *in funzione della* lunghezza della base minore, data dalla lettera b .

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

Risposta: $p =$



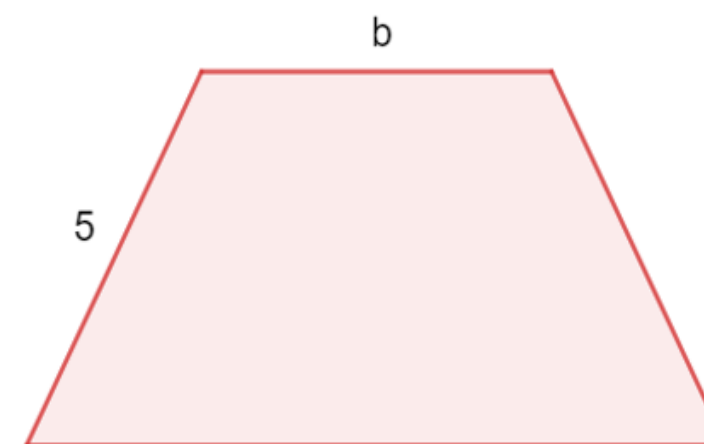
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

(The *formula task*)

- La competenza algebrica richiesta è significativa: la figura, il testo, il numero e la lettera devono essere *collegati* gli uni con gli altri.
- Il quesito chiede di scrivere una formula che esprima il perimetro di una semplice figura geometrica *in funzione* della lunghezza della base minore, data dalla lettera b .
- La risposta al quesito si ottiene per ‘gradi’, dopo aver considerato **diversi passaggi**.

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

Risposta: $p =$



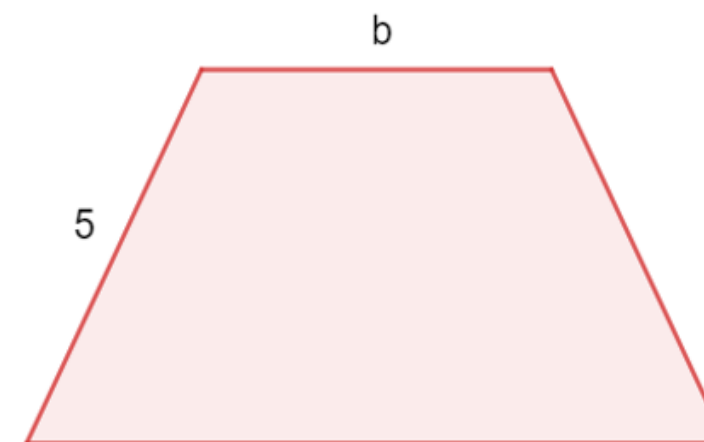
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

(The formula task)

- La risposta implica di operare la somma dei quattro lati del quadrilatero, dopo aver preso in considerazione la lunghezza della base maggiore, la sola mancante nella figura, e il fatto che essa corrisponda a $2b$.

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

Risposta: $p =$



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

(The formula task)

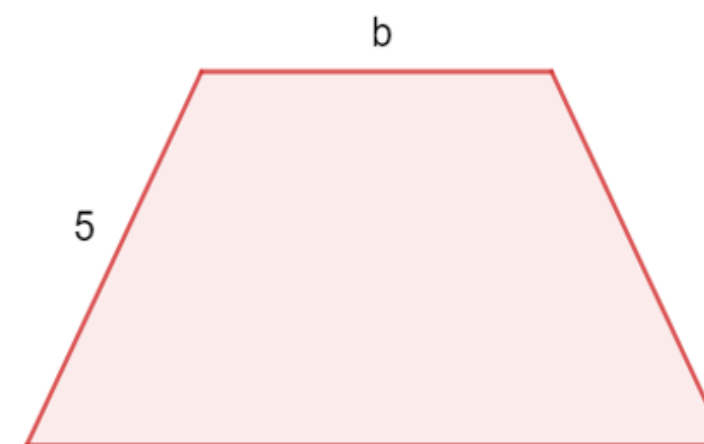
La risposta implica di operare la somma dei quattro lati del quadrilatero, dopo aver preso in considerazione la lunghezza della base maggiore, la sola mancante nella figura, e il fatto che essa corrisponda a $2b$.

La formula cercata è $3b+10$.

Sono tutte risposte corrette, ad es.:

$$p = b+b+b+5+5, p = b+2b+10, p = b+2b+5 \times 2, p = 3b+5 \times 2.$$

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

Risposta: $p =$



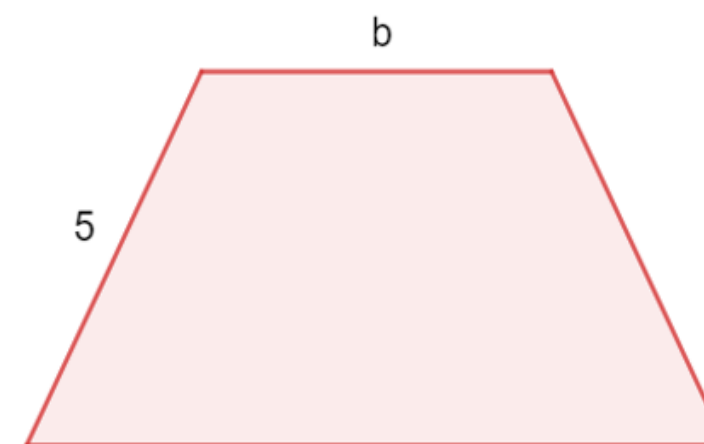
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

(The *formula task*)

- Il compito richiede allo studente di *collegare diversi elementi*: che cosa significa il doppio, che cosa è il perimetro di un quadrilatero, che cosa è un trapezio isoscele, che cosa significa “in funzione di”.

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

Risposta: $p =$



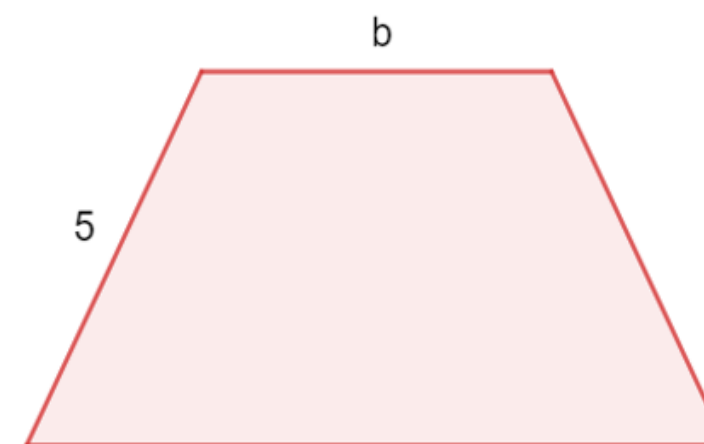
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

(The *formula task*)

- Il compito richiede allo studente di *collegare diversi elementi*: che cosa significa il doppio, che cosa è il perimetro di un quadrilatero, che cosa è un trapezio isoscele, che cosa significa “in funzione di”.
- Relazioni in gioco: tra perimetro e lati, tra i due lati obliqui, tra le due basi, tra le basi e la lettera b (in modo che la base maggiore dipenda dalla minore).

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

Risposta: $p =$



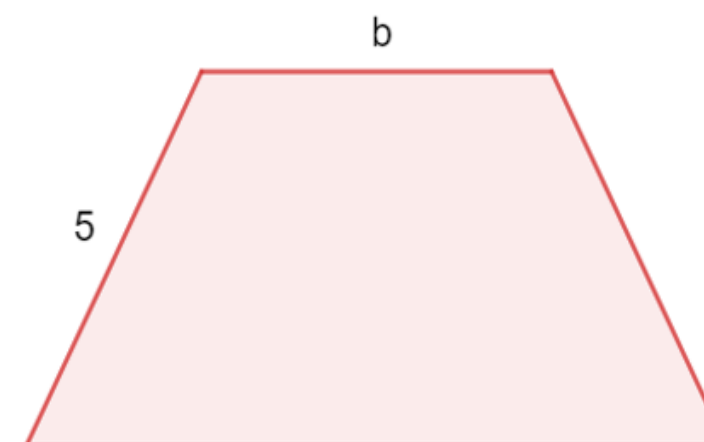
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

(The *formula task*)

- Il compito richiede allo studente di *collegare diversi elementi*: che cosa significa il doppio, che cosa è il perimetro di un quadrilatero, che cosa è un trapezio isoscele, che cosa significa “in funzione di”.
- Relazioni in gioco: tra perimetro e lati, tra i due lati obliqui, tra le due basi, tra le basi e la lettera b (in modo che la base maggiore dipenda dalla minore).
- Controllo e coordinazione: abilità di **stabilire relazioni tra i diversi elementi** e connettere informazione di vario tipo.

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore. (1)



Scrivi una formula che esprima il perimetro p del trapezio in funzione di b . (2)

Digita la risposta alla domanda. (3)

Risposta: $p =$



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

E la competenza algebrica

■ Questioni didattiche

Che tipo di pensiero algebrico (precoce) mobilita la risoluzione del quesito?



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

E la competenza algebrica

■ Questioni didattiche

Che tipo di pensiero algebrico (precoce) mobilita la risoluzione del quesito?

- Quale visione hanno gli studenti della formula?
- Che cosa è una formula per gli studenti?
- Che cosa significa scrivere la formula del perimetro?
- Che cosa significa scriverla in funzione di b ?
- Che ruolo ha la variabile?
- Come sono utilizzate le lettere?
- E il significato dell'uguale?



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

E la competenza algebrica

■ Questioni cognitive

Quali difficoltà presentano gli studenti quando hanno a che fare con un quesito come questo? Quali misconcetti emergono? Che tipo di ragionamento sviluppano?



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

E la competenza algebrica

■ Questioni cognitive

Quali difficoltà presentano gli studenti quando hanno a che fare con un quesito come questo? Quali misconcetti emergono? Che tipo di ragionamento sviluppano?

In particolare,

- nell'utilizzo delle lettere?
- Con la variabile?
- Con la formula?
- Con il perimetro di una figura geometrica?
- Con il concetto di funzione?



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

E la letteratura di ricerca

■ *Senso del simbolo*

Discontinuità tra pensiero aritmetico e pensiero algebrico

Procedurale vs. Concettuale

Operazionale vs. Relazionale

■ Utilizzo delle lettere: etichette, nomi, quantità

Comprensione dei ruoli e dei significati multipli della variabile

Misconcetti corrispondenti

Arcavi, 1994; Bush & Karp, 2013; Carpenter et al., 2013; Janvier, 1996; Kieran, 2006, 2014; Kückemann, 1978; Philipp, 1992; Radford, 2006; Sfard, 1991; Stephens et al., 2017; Usiskin, 1988...



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

E la letteratura di ricerca

■ *Senso del simbolo*

Discontinuità tra pensiero aritmetico e pensiero algebrico

Procedurale vs. Concettuale

Operazionale vs. Relazionale

Arcavi, 1994; Bush & Karp, 2013; Carpenter et al., 2013; Janvier, 1996; Kieran, 2006, 2014; Kückemann, 1978; Philipp, 1992; Radford, 2006; Sfard, 1991; Stephens et al., 2017; Usiskin, 1988...

■ **MacGregor & Stacey (2000)**

Modellizzazione algebrica mediante equazioni lineari: **“route” aritmetiche e algebriche**



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

E la letteratura di ricerca

■ Le formule sono state poco studiate

NONOSTANTE IL LORO RUOLO FONDAMENTALE NELLA MODELLIZZAZIONE, NELLA
MESSA IN RELAZIONE DI GRANDEZZE, NEI PROCESSI DI MISURA



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Il quesito

E la letteratura di ricerca

■ Le formule sono state poco studiate

NONOSTANTE IL LORO RUOLO FONDAMENTALE NELLA MODELLIZZAZIONE, NELLA
MESSA IN RELAZIONE DI GRANDEZZE, NEI PROCESSI DI MISURA

- Spesso associate con la misura di aree e perimetri (regole)
- Talvolta legate alla risoluzione di problemi mediante equazioni o al ruolo dell'uguale
- Condensano aspetti sia concettuali sia procedurali



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO



Come si comportano gli
studenti che risolvono questo
quesito in modo errato?

4 *Route*

R

“relational”

Espressione scritta della formula con esplicito riferimento alla relazione tra le due basi del trapezio

10,6% (228)

S

“scattered”

Espressione scritta della formula con riferimento ad alcuni degli elementi del quesito e un focus solo parziale

31,5% (676)

N

“narrow”

Espressione scritta della formula di un'area invece che di un perimetro, utilizzando ancora la lettera data

13,6% (293)

M

“murky”

Espressione scritta che fa uso di lettere non sempre in modo trasparente rispetto al contesto dato

26,2% (562)



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

4 *Route* (+ una)

R

“relational”

Espressione scritta della formula con esplicito riferimento alla relazione tra le due basi del trapezio

10,6% (228)

S

“scattered”

Espressione scritta della formula con riferimento ad alcuni degli elementi del quesito e un focus solo parziale

31,5% (676)

N

“narrow”

Espressione scritta della formula di un'area invece che di un perimetro, utilizzando ancora la lettera data

13,6% (293)

M

“murky”

Espressione scritta che fa uso di lettere non sempre in modo trasparente rispetto al contesto dato

26,2% (562)

+R5 = solo numeri



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route R

(“relational”)

R1

Utilizzano una lettera al posto del numero 5

N=62

R2

Utilizzano solo numeri nella formula

N=32

R3

Scrivono la formula a parole

N=4

R4

Scrivono la relazione inversa

N=66

R5

Commettono errori di segno o battitura nelle operazioni

N=64

Attenzione **specific**a alla relazione tra le basi del trapezio



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route R

("relational")

R1

Utilizzano una lettera al posto del numero 5

$$bx3+2l$$

$$b+(b*2)+(l*2)$$

$$b+2b+a+a$$

N=62

R2

Utilizzano solo numeri nella formula

N=32

R3

Scrivono la formula a parole

N=4

R4

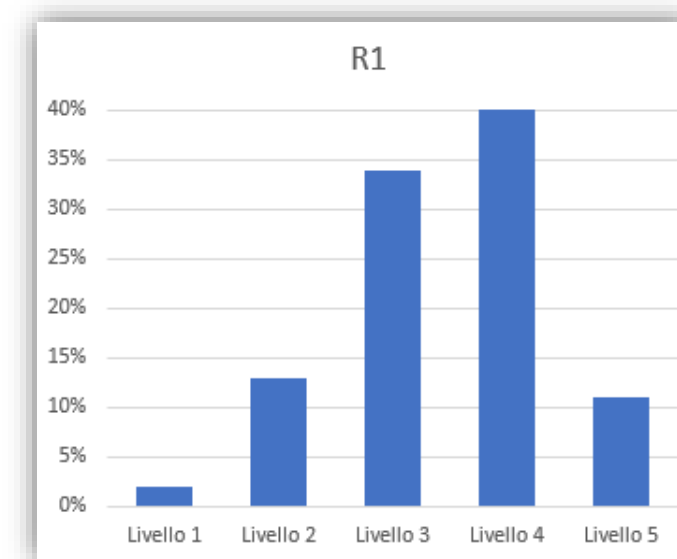
Scrivono la relazione inversa

N=66

R5

Commettono errori di segno o battitura nelle operazioni

N=64





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route R

("relational")

R1

Utilizzano una lettera al posto del numero 5

$$bx3+2l$$

$$b+(b*2)+(l*2)$$

$$b+2 \quad b+a+a$$

N=62

R2

Utilizzano solo numeri nella formula

$$[6+(6*2)]+(5*2)$$

$$5+5+5+(5*2)$$

$$3+(3*2)+(5+5)$$

N=32

R3

Scrivono la formula a parole

N=4

R4

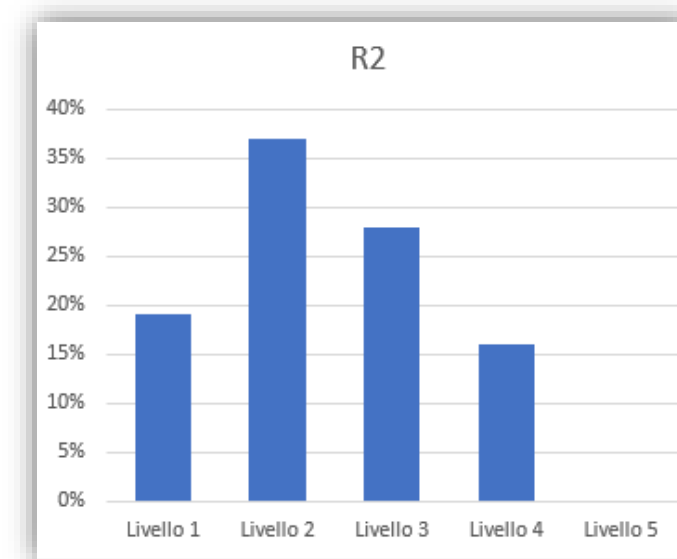
Scrivono la relazione inversa

N=66

R5

Commettono errori di segno o battitura nelle operazioni

N=64





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route R

("relational")

R1	R2	R3	R4	R5
Utilizzano una lettera al posto del numero 5	Utilizzano solo numeri nella formula	Scrivono la formula a parole	Scrivono la relazione inversa	Commettono errori di segno o battitura nelle operazioni
$bx3+2l$	$[6+(6*2)]+(5*2)$	Tu devi moltiplicare b per 2 per trovare la base maggiore poi aggiungere 5 più 5 e alla fine sommare tutti i numeri per trovare il perimetro		
$b+(b*2)+(l*2)$	$5+5+5+(5*2)$			
$b+2 b+ a+ a$	$3+(3x2)+(5+5)$			
N=62	N=32	N=4	N=66	N=64

3 studenti di livello 3
1 studente di livello 2



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route R

("relational")

R1

Utilizzano una lettera al posto del numero 5

$$bx3+2l$$

$$b+(b*2)+(l*2)$$

$$b+2b+a+a$$

N=62

R2

Utilizzano solo numeri nella formula

$$[6+(6*2)]+(5*2)$$

$$5+5+5+(5*2)$$

$$3+(3*2)+(5+5)$$

N=32

R3

Scrivono la formula a parole

Tu devi moltiplicare b per 2 per trovare la base maggiore poi aggiungere 5 più 5 e alla fine sommare tutti i numeri per trovare il perimetro

N=4

R4

Scrivono la relazione inversa

$$(B:2)+B+(5+5)$$

$$10+B+1/2B$$

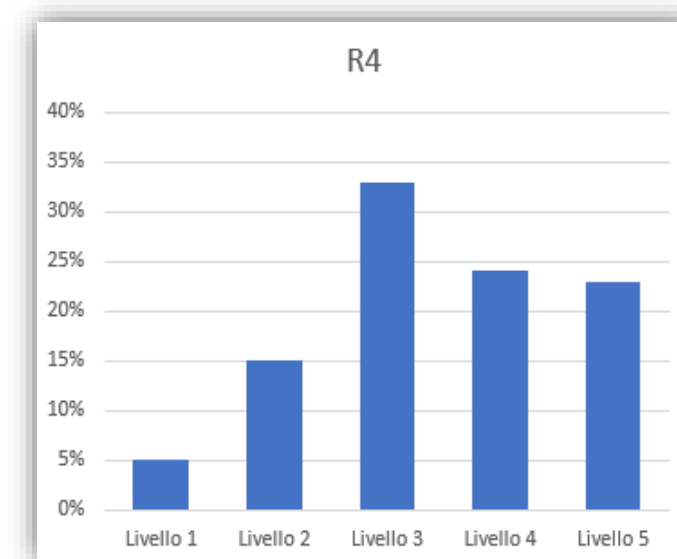
$$(l0*2)+bm+bm/2$$

N=66

R5

Commettono errori di segno o battitura nelle operazioni

N=64





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route R

("relational")

R1

Utilizzano una lettera al posto del numero 5

$$bx3+2l$$

$$b+(b*2)+(l*2)$$

$$b+2b+a+a$$

N=62

R2

Utilizzano solo numeri nella formula

$$[6+(6*2)]+(5*2)$$

$$5+5+5+(5*2)$$

$$3+(3*2)+(5+5)$$

N=32

R3

Scrivono la formula a parole

Tu devi moltiplicare b per 2 per trovare la base maggiore poi aggiungere 5 più 5 e alla fine sommare tutti i numeri per trovare il perimetro

N=4

R4

Scrivono la relazione inversa

$$(B:2)+B+(5+5)$$

$$10+B+1/2B$$

$$(l0*2)+bm+bm/2$$

N=66

R5

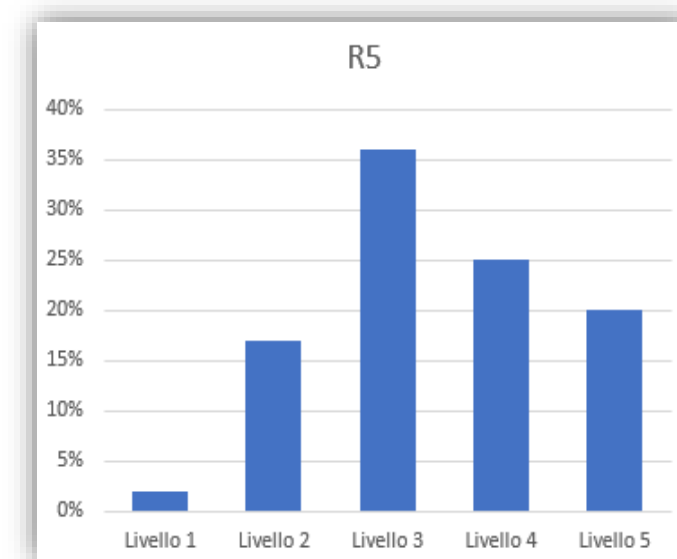
Commettono errori di segno o battitura nelle operazioni

$$(b*b*2)*(5*5)$$

$$5*2+b+b*b$$

$$b+(2+b)+(2+5)$$

N=64





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route S

(“scattered”)

S1

Utilizzano la lettera B per indicare la base maggiore

N=229

S2

Moltiplicano per 2 invece che per 3

N=276

S3

Scrivono il perimetro come somma di 4 lati

N=145

S4

Scrivono la procedura a parole

N=26

Attenzione sporadica agli elementi forniti dal quesito (focus solo su alcuni di essi)



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route S

("scattered")

S1

Utilizzano la lettera *B* per indicare la base maggiore

$$B + b + 5 + 5$$

$$(5 * 2) + (b + B)$$

$$10 + b + B$$

N=229

S2

Moltiplicano per 2 invece che per 3

N=276

S3

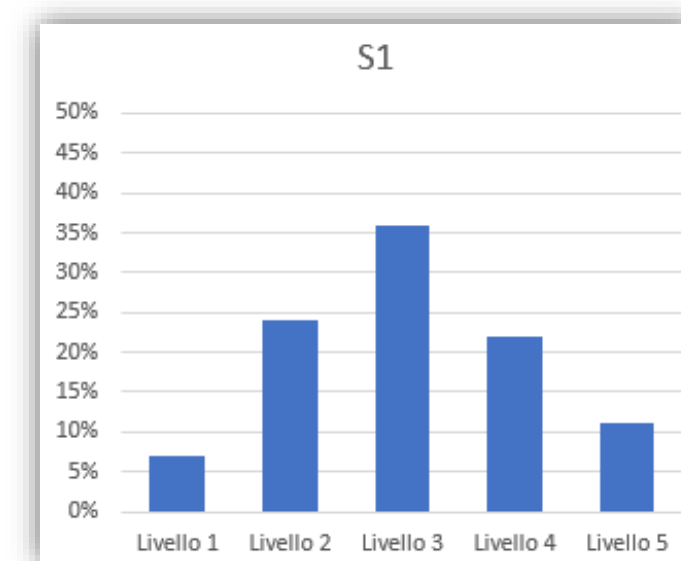
Scrivono il perimetro come somma di 4 lati

N=145

S4

Scrivono la procedura a parole

N=26





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route S

("scattered")

S1

Utilizzano la lettera B per indicare la base maggiore

$$B + b + 5 + 5$$

$$(5 * 2) + (b + B)$$

$$10 + b + B$$

N=229

S2

Moltiplicano per 2 invece che per 3

$$(5 + 5) + b * 2$$

$$2b + 10$$

$$(5 + b) * 2$$

N=276

S3

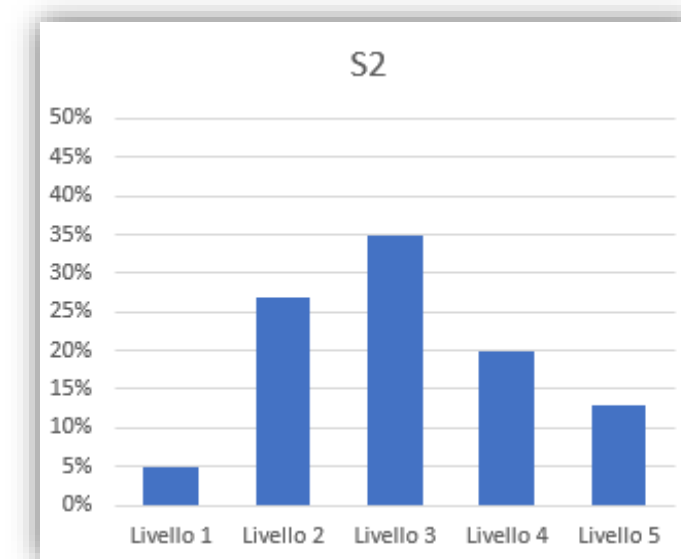
Scrivono il perimetro come somma di 4 lati

N=145

S4

Scrivono la procedura a parole

N=26





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route S

("scattered")

S1

Utilizzano la lettera B per indicare la base maggiore

$$B + b + 5 + 5$$

$$(5 * 2) + (b + B)$$

$$10 + b + B$$

N=229

S2

Moltiplicano per 2 invece che per 3

$$(5 + 5) + b * 2$$

$$2b + 10$$

$$(5 + b) * 2$$

N=276

S3

Scrivono il perimetro come somma di 4 lati

$$B + b + l + l$$

$$AB + BC + CD + DE$$

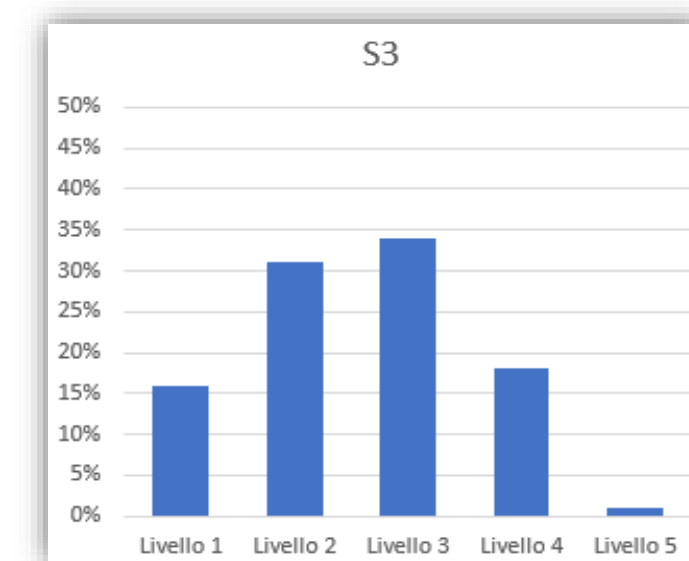
$$b_1 + b_2 + 2l$$

N=145

S4

Scrivono la procedura a parole

N=26



Route S

(“scattered”)

S1

Utilizzano la lettera B per indicare la base maggiore

$$B + b + 5 + 5$$

$$(5 * 2) + (b + B)$$

$$10 + b + B$$

$$N = 229$$

S2

Moltiplicano per 2 invece che per 3

$$(5 + 5) + b * 2$$

$$2b + 10$$

$$(5 + b) * 2$$

$$N = 276$$

S3

Scrivono il perimetro come somma di 4 lati

$$B + b + l + l$$

$$AB + BC + CD + DE$$

$$b_1 + b_2 + 2l$$

$$N = 145$$

S4

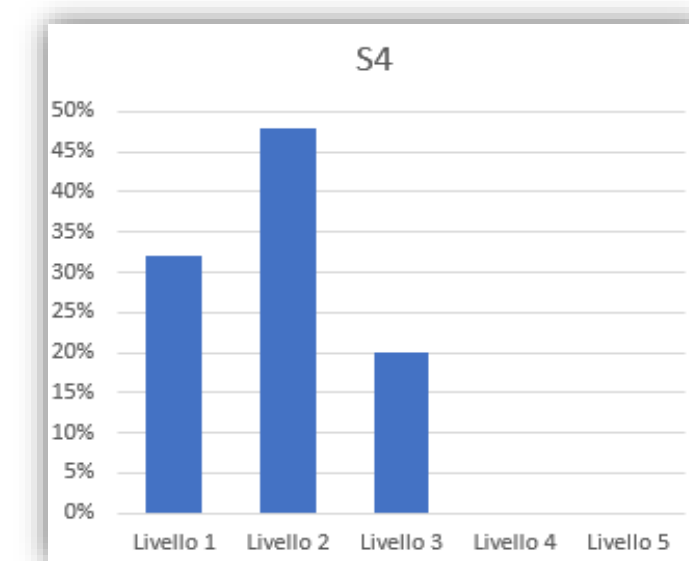
Scrivono la procedura a parole

$b_{\text{maggiore}} + b_{\text{minore}} + 2$
lati obliqui

base maggiore più base minore più lato più lato

SI ADDIZIONANO TUTTI I LATI

$$N = 26$$





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route N

(“*narrow*”)

N1	N2	N3	N4	N5
Utilizzano la lettera B per indicare la base maggiore	Tengono conto della relazione tra le due basi	Scrivono la formula dell'area di un triangolo	Scrivono la formula dell'area a parole	Utilizzano la lettera h in modo improprio
N=112	N=35	N=31	N=28	N=87

Attenzione
ristretta a specifici
elementi del
quesito (focus sul
trapezio e sulla
richiesta della
formula)

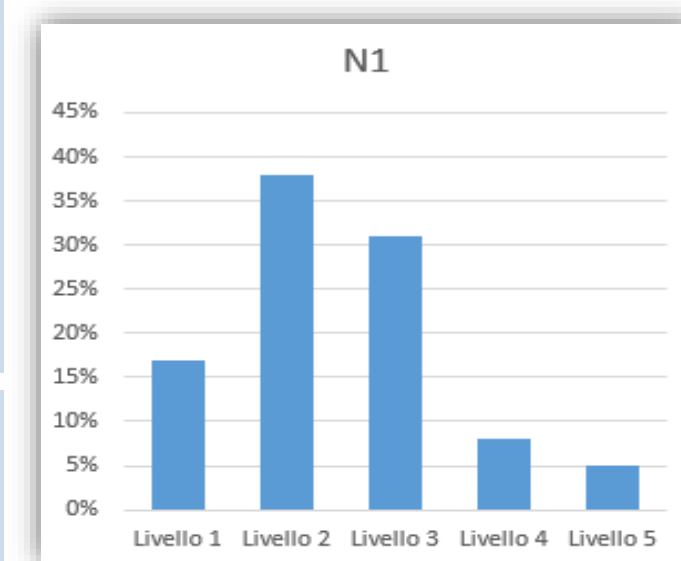


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route N

("narrow")

N1	N2	N3	N4	N5
Utilizzano la lettera B per indicare la base maggiore	Tengono conto della relazione tra le due basi	Scrivono la formula dell'area di un triangolo	Scrivono la formula dell'area a parole	Utilizzano la lettera h in modo improprio
$(b+B) \times h / 2$				
$((b+B) \text{ per } h) : 2$				
$(bM+bm) * h / 2$				
N=112	N=35	N=31	N=28	N=87



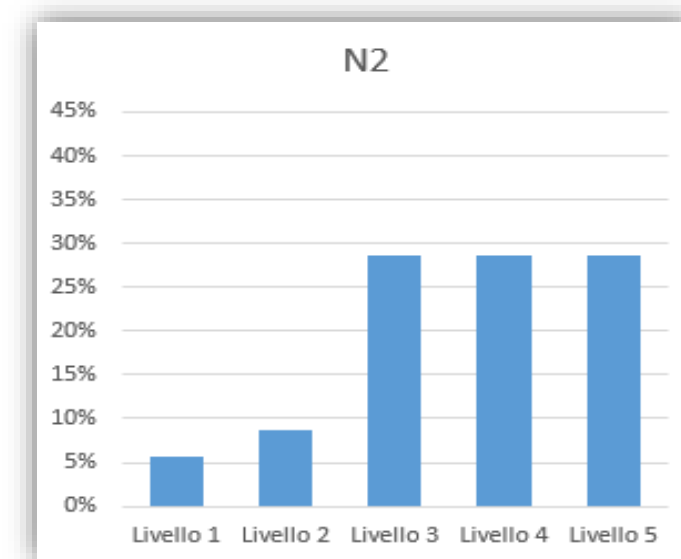


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route N

("narrow")

N1	N2	N3	N4	N5
Utilizzano la lettera <i>B</i> per indicare la base maggiore	Tengono conto della relazione tra le due basi	Scrivono la formula dell'area di un triangolo	Scrivono la formula dell'area a parole	Utilizzano la lettera <i>h</i> in modo improprio
$(b+B) \times h / 2$	(<i>b</i> per tre) per $h:2$			
$((b+B) \text{ per } h) : 2$	$[b+(\mathbf{b*2})] * h / 2$			
$(bM+bm) * h / 2$	$[(\mathbf{b*2})+b*5] / 2$			
N=112	N=35	N=31	N=28	N=87



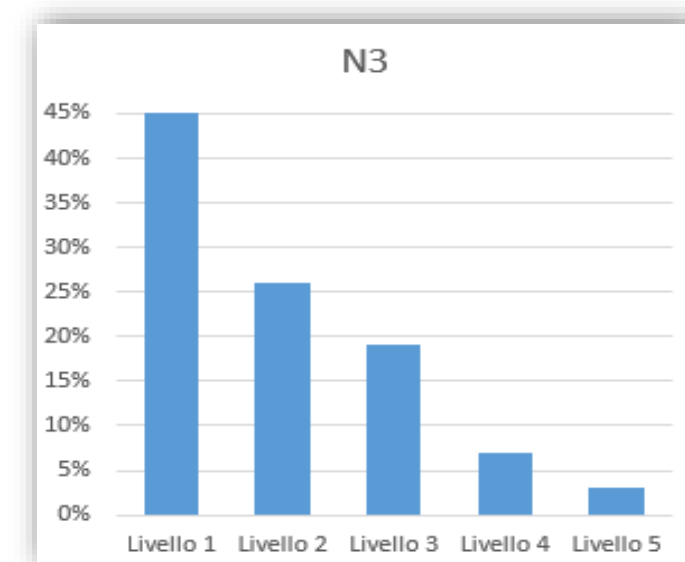


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route N

("narrow")

N1	N2	N3	N4	N5
Utilizzano la lettera <i>B</i> per indicare la base maggiore	Tengono conto della relazione tra le due basi	Scrivono la formula dell'area di un triangolo	Scrivono la formula dell'area a parole	Utilizzano la lettera <i>h</i> in modo improprio
$(b+B) \times h / 2$	$(b \text{ per tre}) \text{ per } h : 2$	$b * h / 2$		
$((b+B) \text{ per } h) : 2$	$[b + (b * 2)] * h / 2$	$2b * h / 2$		
$(bM + bm) * h / 2$	$[(b * 2) + b * 5] / 2$	$b \text{ per } h : 2$		
N=112	N=35	N=31	N=28	N=87



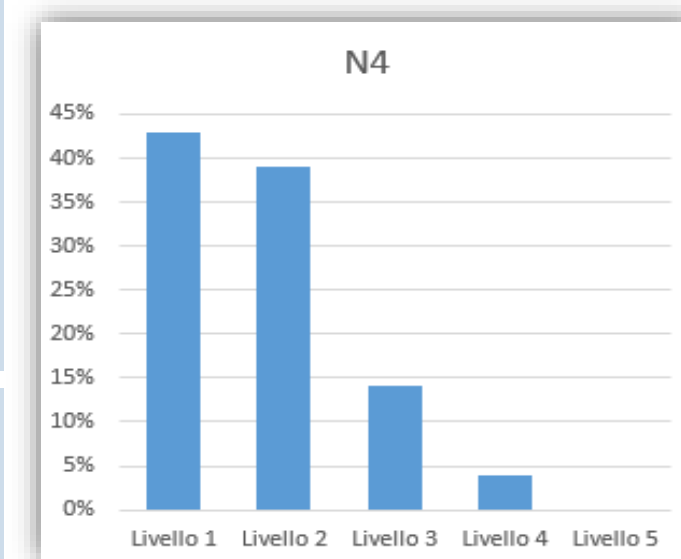


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route N

("narrow")

N1	N2	N3	N4	N5
Utilizzano la lettera <i>B</i> per indicare la base maggiore	Tengono conto della relazione tra le due basi	Scrivono la formula dell'area di un triangolo	Scrivono la formula dell'area a parole	Utilizzano la lettera <i>h</i> in modo improprio
$(b+B) \times h / 2$	$(b \text{ per tre}) \text{ per } h : 2$	$b * h / 2$	base maggiore più base minore per altezza diviso due	
$((b+B) \text{ per } h) : 2$	$[b+(b*2)] * h / 2$	$2b * h / 2$	base x altezza diviso 2	
$(bM+bm) * h / 2$	$[(b*2)+b*5] / 2$	$b \text{ per } h : 2$	base x altezza	
N=112	N=35	N=31	N=28	N=87



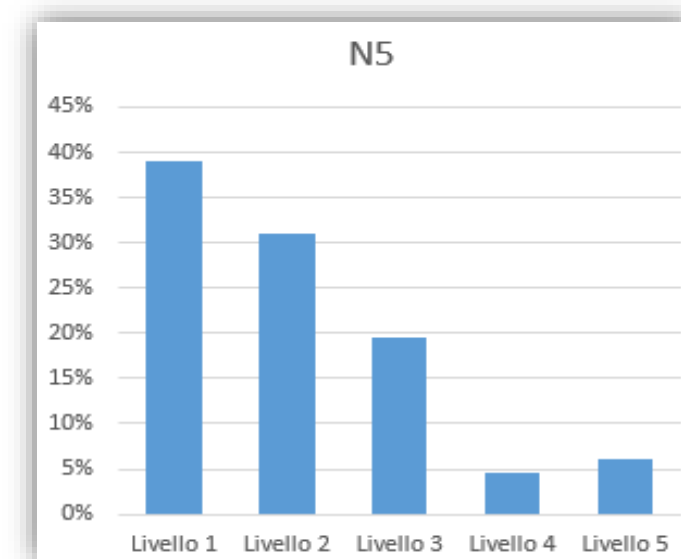


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route N

("narrow")

N1	N2	N3	N4	N5
Utilizzano la lettera B per indicare la base maggiore	Tengono conto della relazione tra le due basi	Scrivono la formula dell'area di un triangolo	Scrivono la formula dell'area a parole	Utilizzano la lettera h in modo improprio
$(b+B) \times h / 2$	$(b \text{ per tre}) \text{ per } h : 2$	$b * h / 2$	base maggiore più base minore per altezza diviso due	$(b+h) * 2$
$((b+B) \text{ per } h) : 2$	$[b+(b*2)] * h / 2$	$2b * h / 2$	base x altezza diviso 2	$b * h + 5 * 2$
$(bM+bm) * h / 2$	$[(b*2)+b*5] / 2$	$b \text{ per } h : 2$	base x altezza	$[B+(B/2)] * h$
N=112	N=35	N=31	N=28	N=87





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Route M

(“murky”)

M1	M2	M3
Utilizzano la lettera <i>b</i> e il numero 5	Utilizzano la lettera <i>b</i> e il numero 2	Utilizzano la lettera <i>b</i> e altre lettere
N=202	N=180	N=180

Approccio **non** sempre chiaro e **comprensibile** al quesito, spesso orientato a una lettura parziale (ad esempio, focalizzata soprattutto sulla figura, o sullo stimolo verbale)



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

M1

Utilizzano la
lettera *b* e il
numero 5

$5*2+2*b+B-b$

$b+5+5+10$

$(b \times 2)+5 \times 3 : 2$

N=202

M2

Utilizzano la
lettera *b* e il
numero 2

N=180

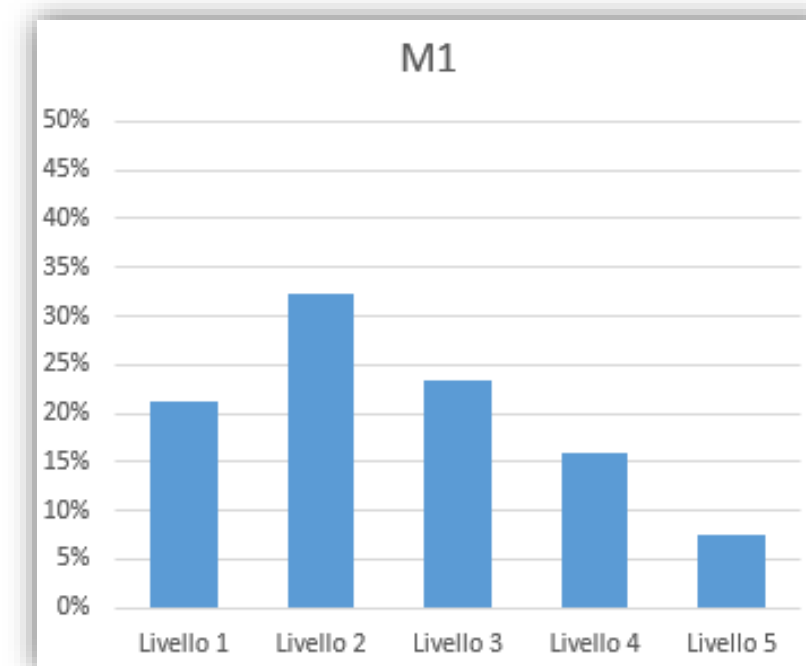
M3

Utilizzano la
lettera *b* e
altre lettere

N=180

Route M

("murky")





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

M1

Utilizzano la
lettera *b* e il
numero 5

$$5*2+2*b+B-b$$

$$b+5+5+10$$

$$(b \times 2)+5 \times 3 : 2$$

N=202

M2

Utilizzano la
lettera *b* e il
numero 2

$$b*2+b*2+b+b$$

$$[b+(b \times 2)]:2$$

$$b+b+b*2/2$$

N=180

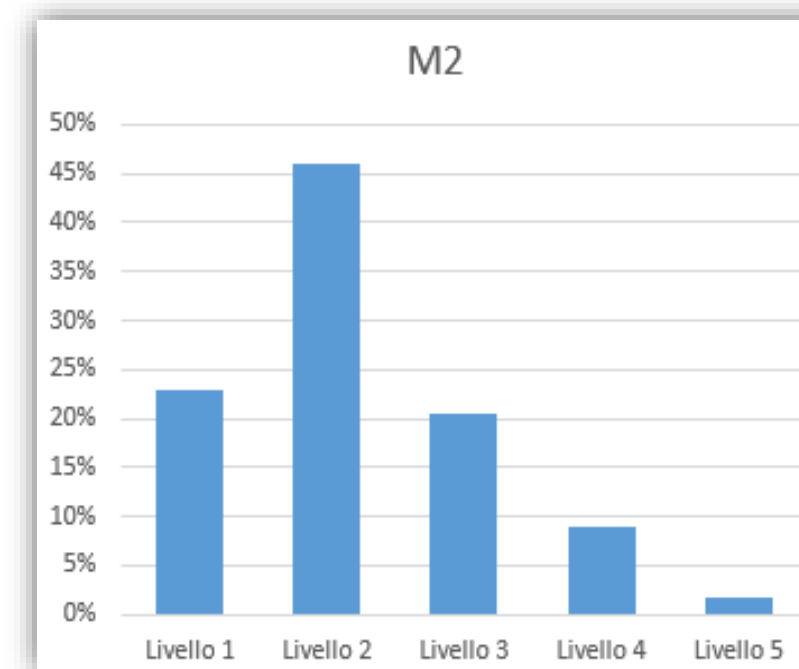
M3

Utilizzano la
lettera *b* e
altre lettere

N=180

Route M

("murky")





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

M1

Utilizzano la
lettera *b* e il
numero 5

$$5*2+2*b+B-b$$

$$b+5+5+10$$

$$(b \times 2)+5 \times 3 : 2$$

N=202

M2

Utilizzano la
lettera *b* e il
numero 2

$$b*2+b*2+b+b$$

$$[b+(b \times 2)]:2$$

$$b+b+b*2/2$$

N=180

M3

Utilizzano la
lettera *b* e
altre lettere

$$H \neq b+B$$

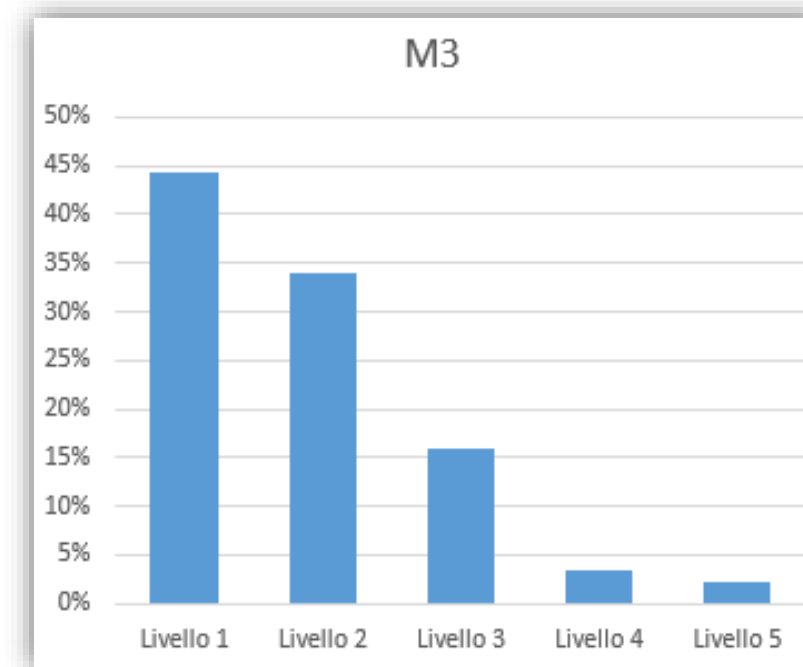
$$b*(C*3)-(C:2)$$

$$(b+b)+(B+B)$$

N=180

Route M

("murky")





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Diamo i numeri

Studenti di ogni livello in ogni *route*

	Livello 1	Livello 2	Livello 3	Livello 4	Livello 5	Totale
<i>Route R</i>	11	42	78	62	35	228
<i>Route S</i>	61	188	234	132	61	676
<i>Route N</i>	81	92	72	26	22	293
<i>Route M</i>	164	209	113	54	22	562
Eliminate	17	11	11	1	0	40
R5 (numeri)	139	96	71	34	8	348
Totale	473	638	579	309	148	2147



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Diamo i numeri

Studenti di ogni livello in ogni *route*

	Livello 1	Livello 2	Livello 3	Livello 4	Livello 5	Totale
<i>Route R</i>	11	42	78	62	35	228
<i>Route S</i>	61	188	234	132	61	676
<i>Route N</i>	81	92	72	26	22	293
<i>Route M</i>	164	209	113	54	22	562
Eliminate	17	11	11	1	0	40
R5 (numeri)	139	96	71	34	8	348
Totale	473	638	579	309	148	2147

1759

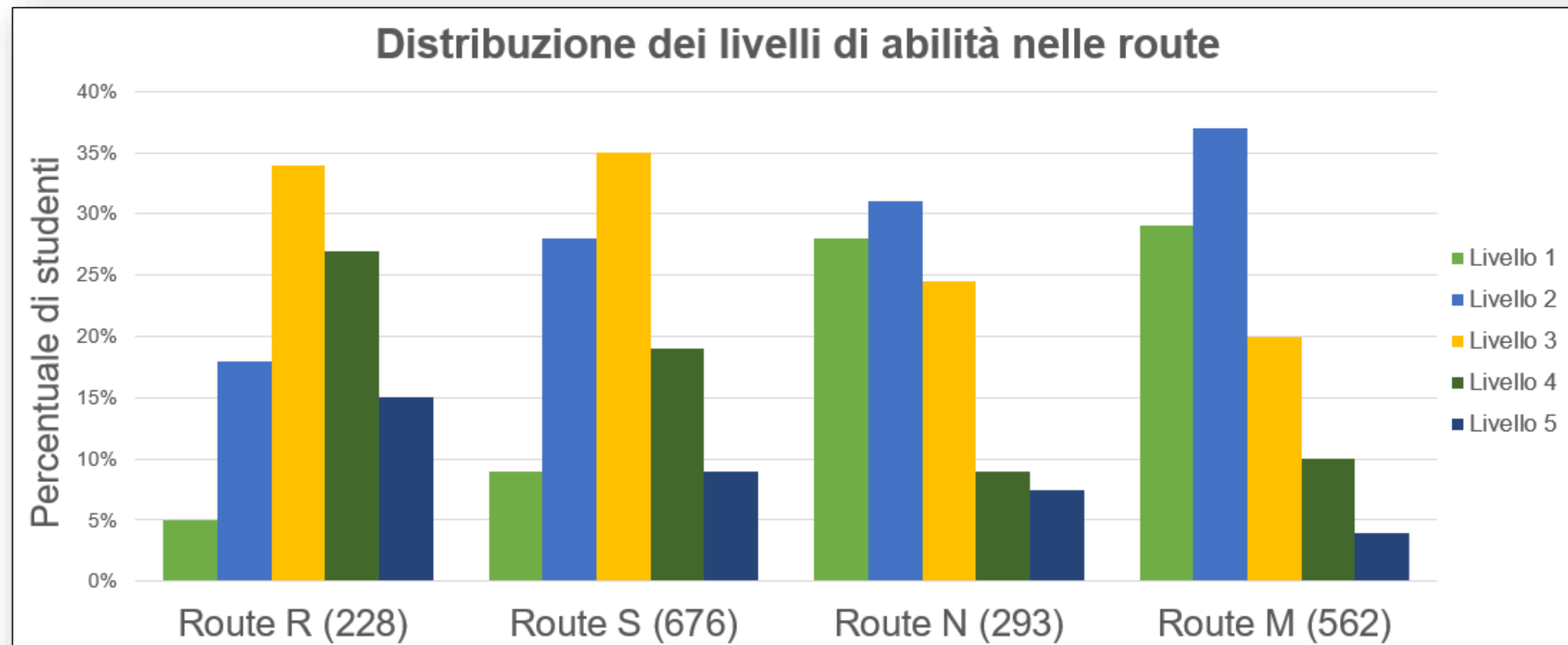


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Graficamente

Distribuzione relativa dei livelli

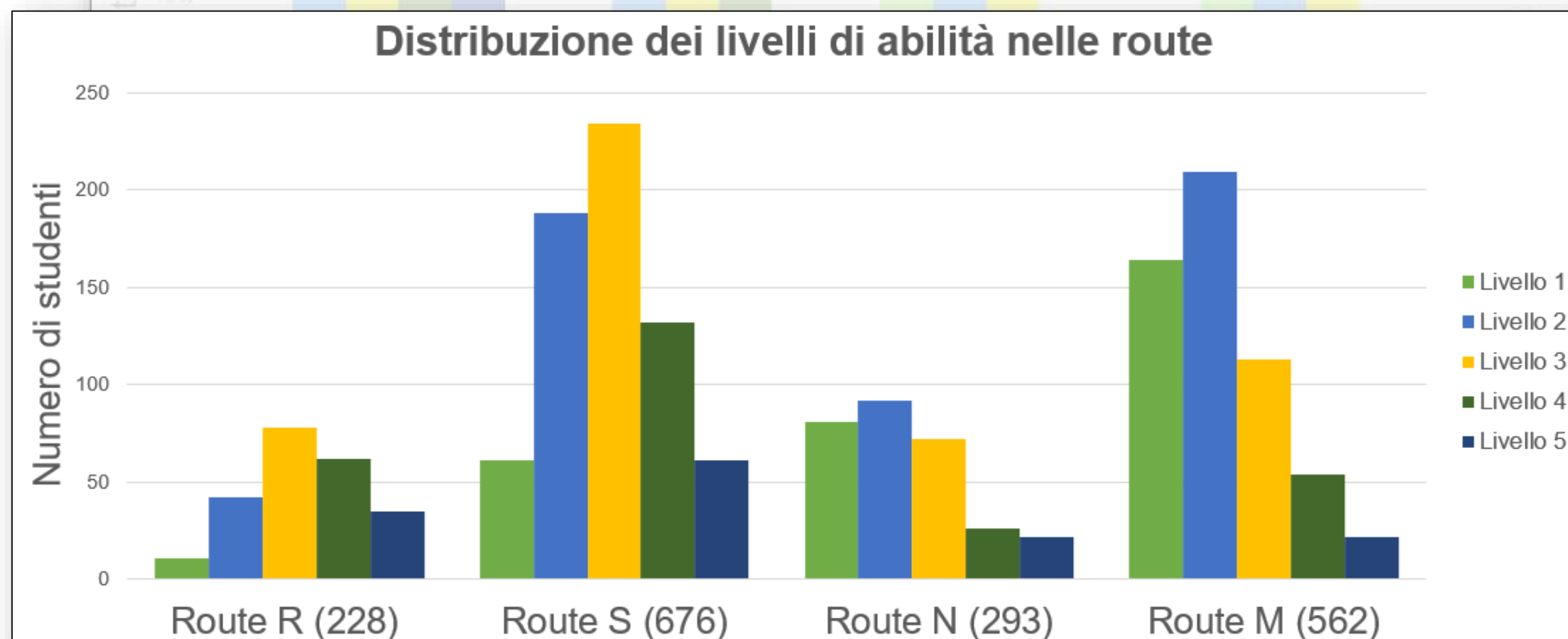
Studenti di livello medio-alto sono presenti in percentuale maggiore nelle prime due *route* e diminuiscono nelle ultime due, mentre studenti di livelli bassi (1 e 2) si comportano all'opposto.



Graficamente

Distribuzione assoluta dei livelli

Ritroviamo un andamento simile in ogni *route*, se consideriamo le frequenze assolute (riscaldiamo cioè rispetto al peso dei singoli gruppi).

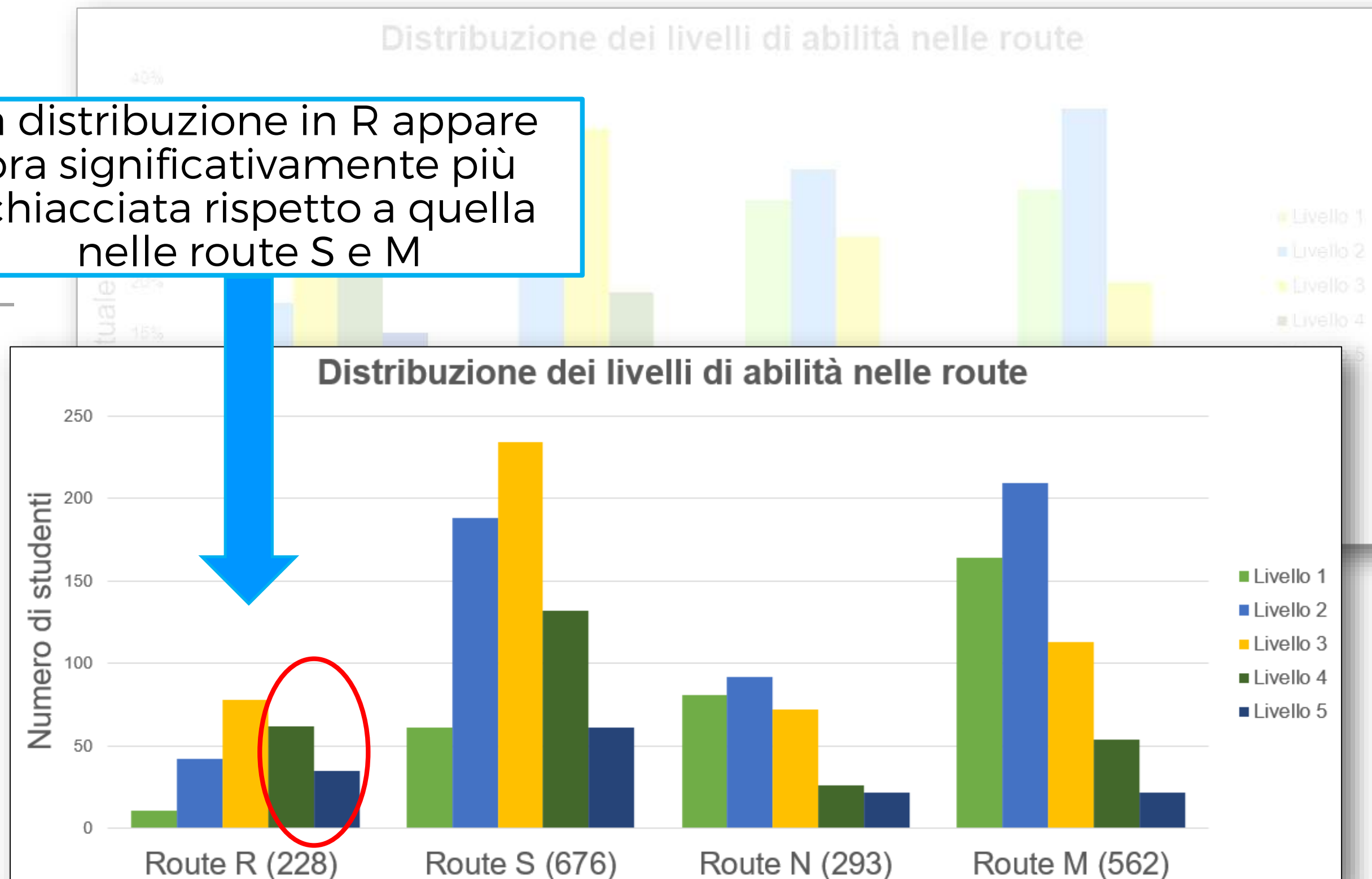


Graficamente

Distribuzione assoluta dei livelli

Ritroviamo un andamento simile in ogni *route*, se consideriamo le frequenze assolute (riscaldiamo cioè rispetto al peso dei singoli gruppi).

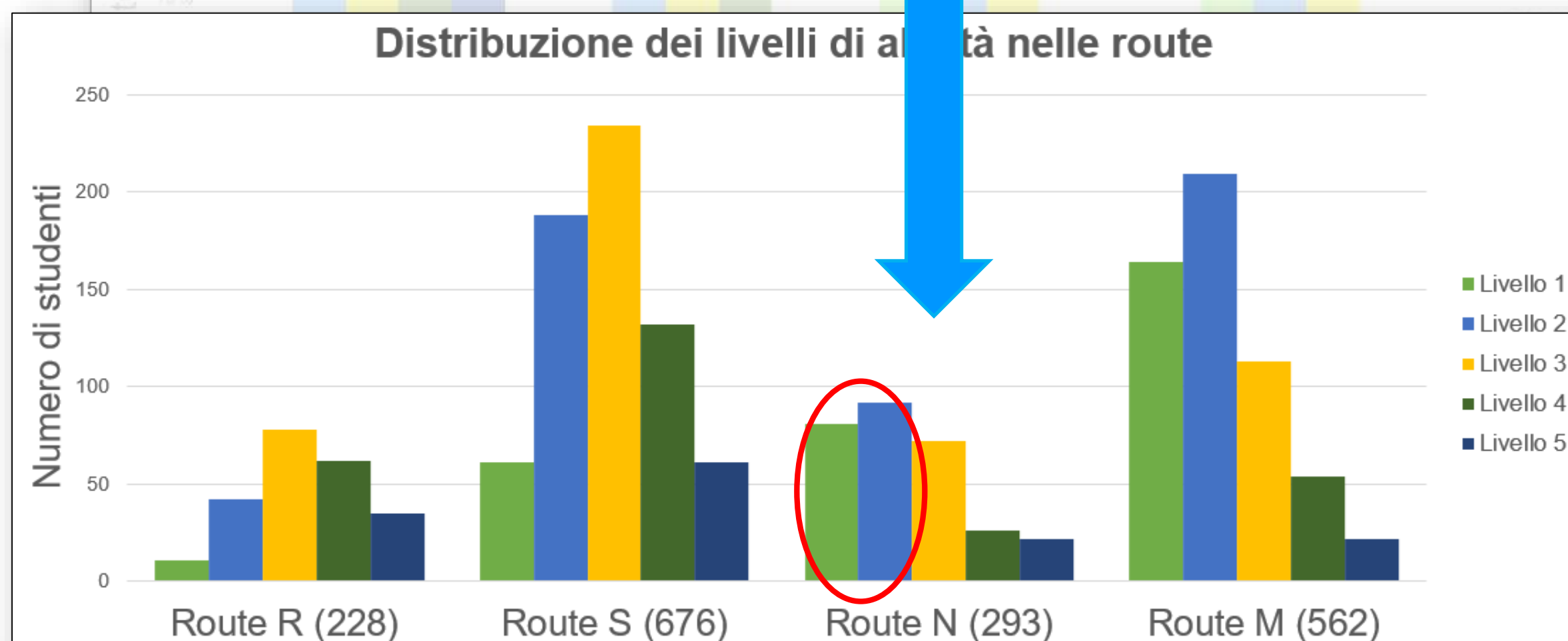
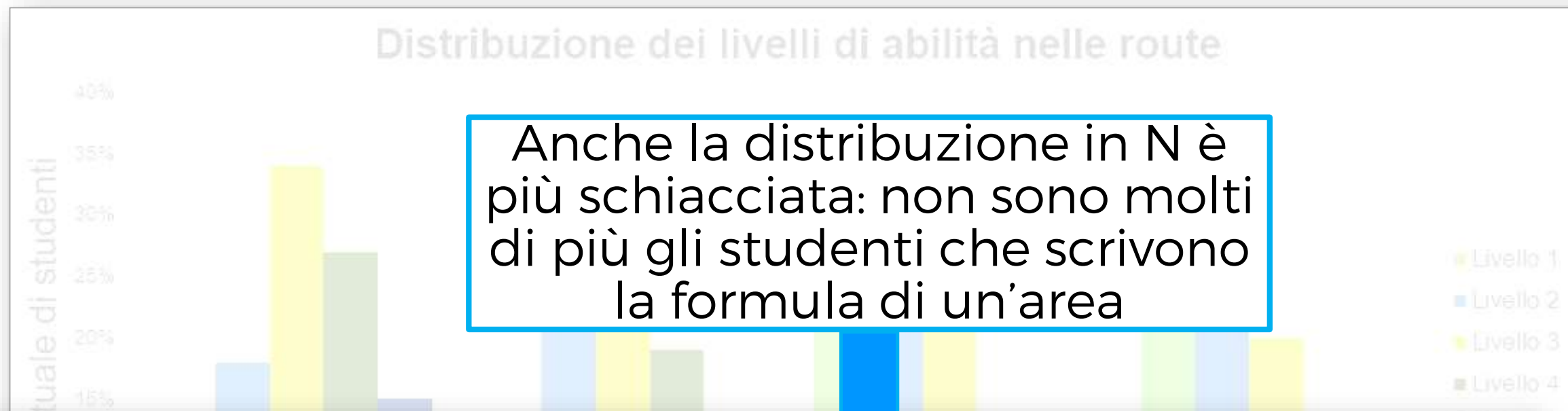
La distribuzione in R appare ora significativamente più schiacciata rispetto a quella nelle route S e M



Graficamente

Distribuzione assoluta dei livelli

Ritroviamo un andamento simile in ogni *route*, se consideriamo le frequenze assolute (riscaliamo cioè rispetto al peso dei singoli gruppi).



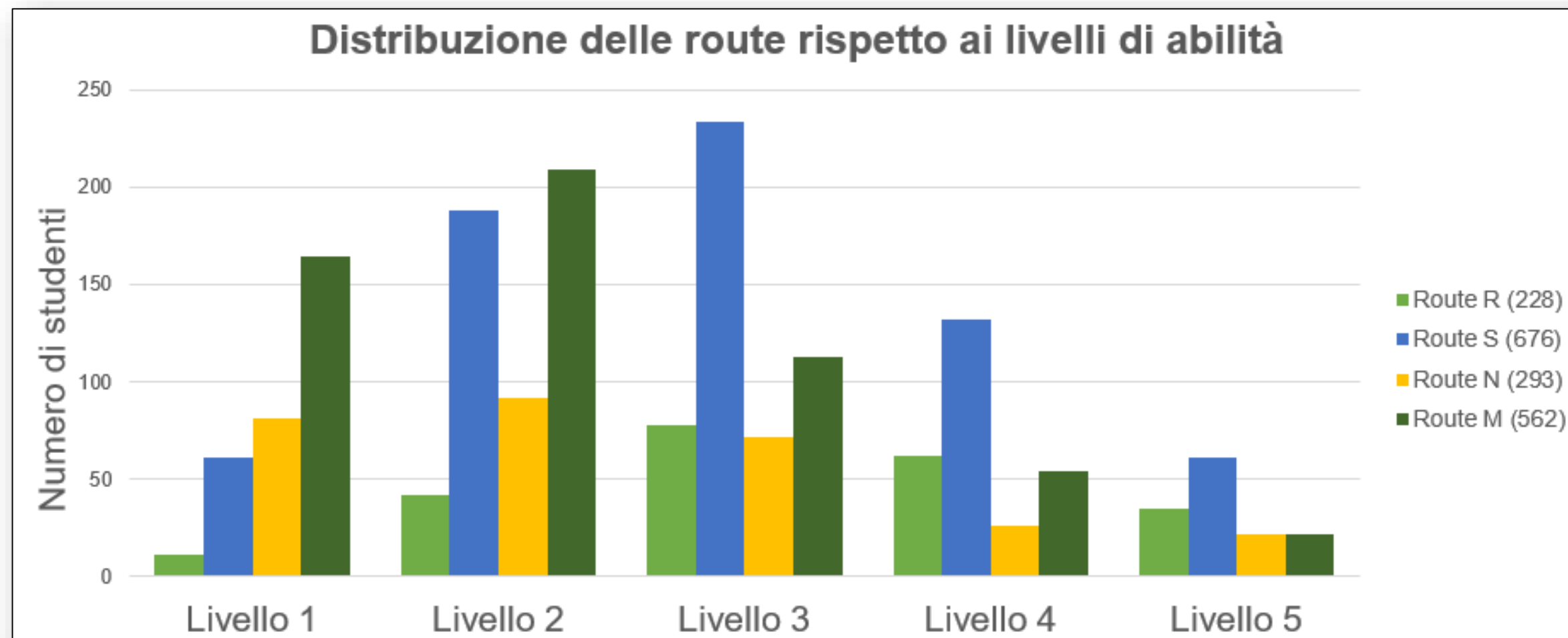


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Graficamente

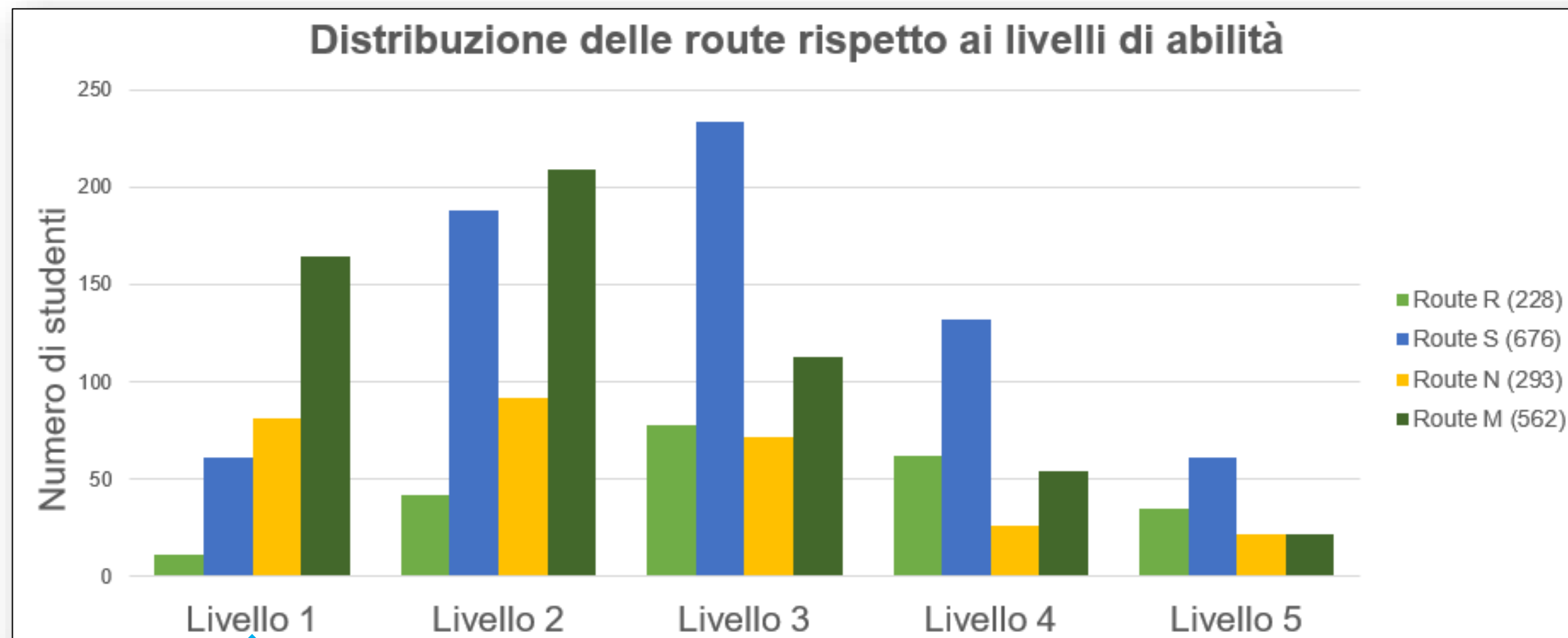
Distribuzione assoluta delle route

Ritroviamo alcune delle precedenti informazioni ma le guardiamo da un altro punto di vista e, nel contempo, ne troviamo di nuove.



Distribuzione assoluta delle route

Ritroviamo alcune delle precedenti informazioni ma le guardiamo da un altro punto di vista e, nel contempo, ne troviamo di nuove.

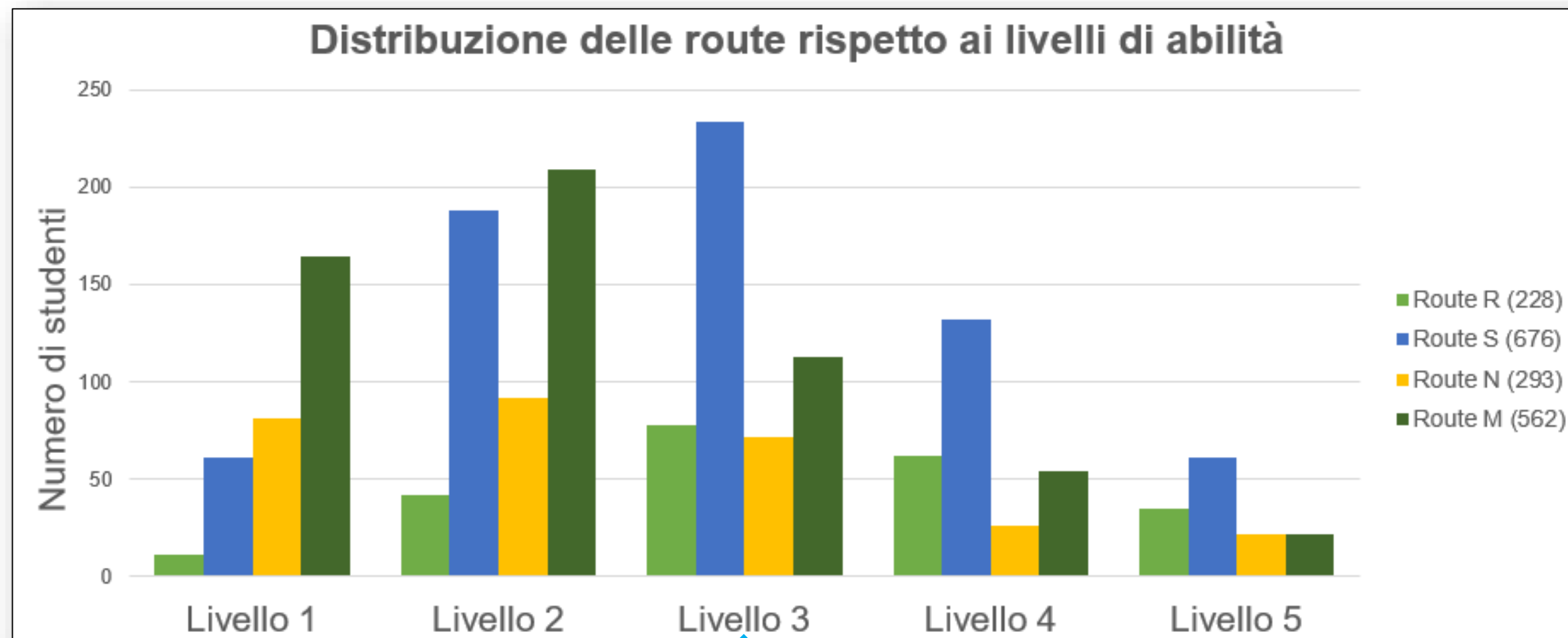


Il numero di risposte errate fornite da studenti di livello 1 aumenta nel passaggio dalla *route R* alla *route M*

Graficamente

Distribuzione assoluta delle route

Ritroviamo alcune delle precedenti informazioni ma le guardiamo da un altro punto di vista e, nel contempo, ne troviamo di nuove.

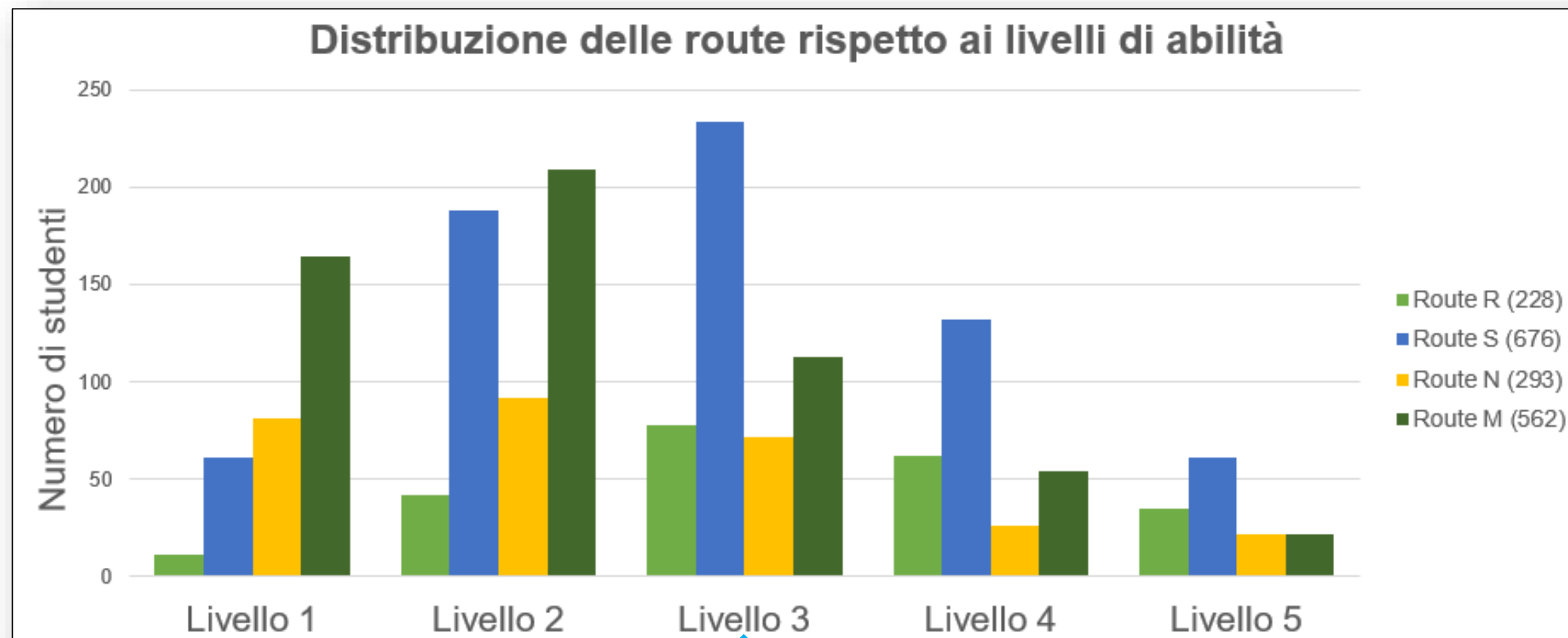


La maggior parte delle risposte errate fornite da studenti di livello 3 finisce nella *route S*

Graficamente

Distribuzione assoluta delle route

Ritroviamo alcune delle precedenti informazioni ma le guardiamo da un altro punto di vista e, nel contempo, ne troviamo di nuove.



Le risposte nella *route S* ci possono dire qualcosa del livello 3?

La maggior parte delle risposte errate fornite da studenti di livello 3 finisce nella *route S*



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Valutazione & didattica

Le route seguite dagli studenti

- Permettono di dare una lettura del modo di ragionare degli studenti di *grado 8* nella risoluzione di un quesito di questo tipo, mettendo in luce criticità ed eventuali misconcetti.



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Valutazione & didattica

Le route seguite dagli studenti

- Permettono di dare una lettura del modo di ragionare degli studenti di *grado 8* nella risoluzione di un quesito di questo tipo, mettendo in luce criticità ed eventuali misconcetti.
- Riflettono il connubio tra le relazioni e i passaggi messi in gioco dal quesito e i modi in cui gli studenti manifestano pensiero algebrico in tale contesto.



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Valutazione & didattica

Le route seguite dagli studenti

- Permettono di dare una lettura del modo di ragionare degli studenti di *grado 8* nella risoluzione di un quesito di questo tipo, mettendo in luce criticità ed eventuali misconcetti.
- Riflettono il connubio tra le relazioni e i passaggi messi in gioco dal quesito e i modi in cui gli studenti manifestano pensiero algebrico in tale contesto.

Dal punto di vista didattico

- Ci inducono a considerare la **natura generativa dell'errore** e la sua valenza.



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Valutazione & didattica

Le route seguite dagli studenti

- Permettono di dare una lettura del modo di ragionare degli studenti di *grado 8* nella risoluzione di un quesito di questo tipo, mettendo in luce criticità ed eventuali misconcetti.
- Riflettono il connubio tra le relazioni e i passaggi messi in gioco dal quesito e i modi in cui gli studenti manifestano pensiero algebrico in tale contesto.

Dal punto di vista didattico

- Ci inducono a considerare la **natura generativa dell'errore** e la sua valenza.
- Basandosi su un campione rappresentativo di studenti italiani, forniscono **informazioni rilevanti** su come studenti alla fine della scuola secondaria di primo grado utilizzano le lettere e vedono le formule.



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Valutazione & didattica

Le risposte dentro le singole route

- Tra le risposte errate, alcune risposte presentano **passaggi di risoluzione corretti**, alcune (non sempre tra queste) *soddisfano* lo scopo del quesito (A).



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Valutazione & didattica

Le risposte dentro le singole route

- Tra le risposte errate, alcune risposte presentano **passaggi di risoluzione corretti**, alcune (non sempre tra queste) *soddisfano* lo scopo del quesito (A).
- Studenti di tutti i livelli di abilità (o quasi) si trovano dentro ogni sottogruppo di risposte errate (B), sebbene in misura differente.



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Valutazione & didattica

Le risposte dentro le singole route

- Tra le risposte errate, alcune risposte presentano **passaggi di risoluzione corretti**, alcune (non sempre tra queste) *soddisfano* lo scopo del quesito (A).
- Studenti di tutti i livelli di abilità (o quasi) si trovano dentro ogni sottogruppo di risposte errate (B), sebbene in misura differente.
- **Risposte parzialmente corrette**, che contengono passi della risoluzione, mostrano una qualche competenza algebrica (es. $M + M/2 + 10$).

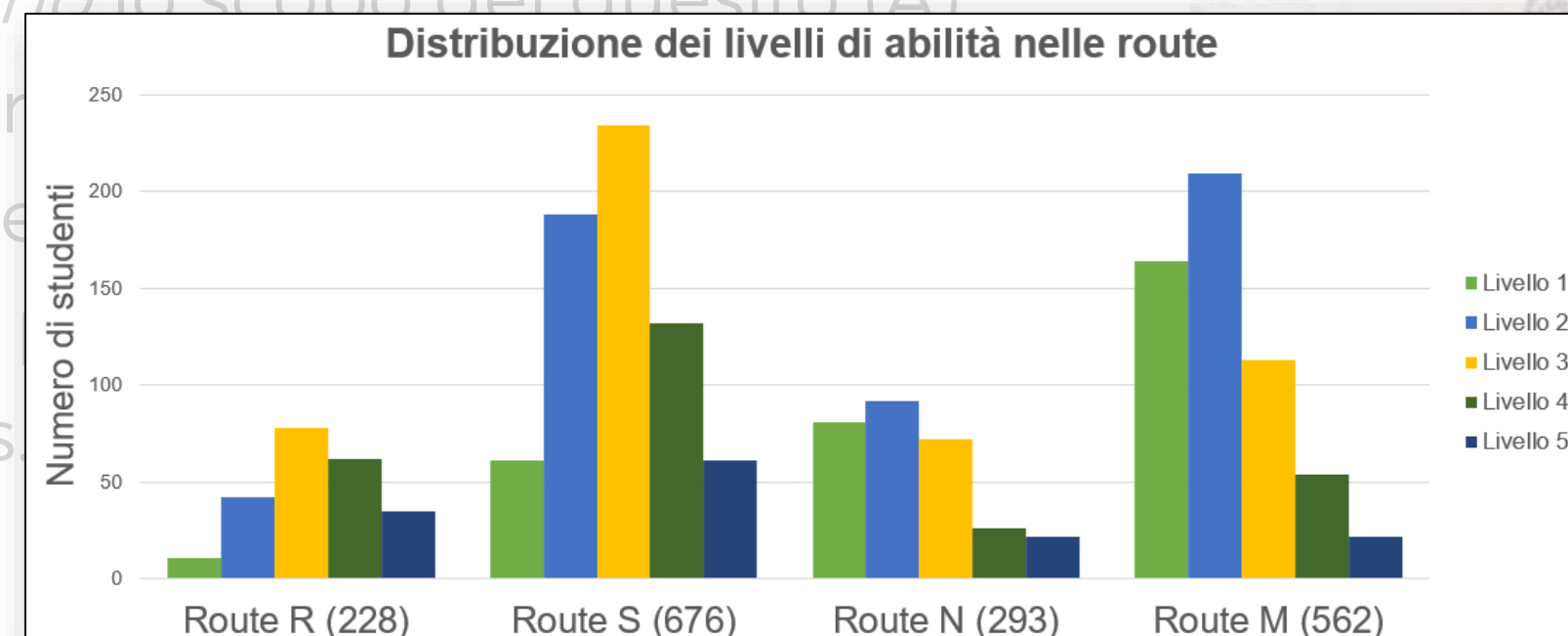


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Valutazione & didattica

Le risposte dentro le singole route

- Tra le risposte errate, alcune risposte presentano passaggi di risoluzione corretti, alcune (non sempre tra queste) *soddisfano lo scopo del quesito (A)*
- Studenti di tutti i livelli di abilità (o quasi) si trovano di risposte errate (B), sebbene in misura differente
- Risposte parzialmente corrette, che contengono mostrano una qualche competenza algebrica (es



Dal punto di vista della valutazione

- La relazione tra livelli di abilità e route: possiamo affermare che le route individuano una “distanza” dalla risposta corretta.



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

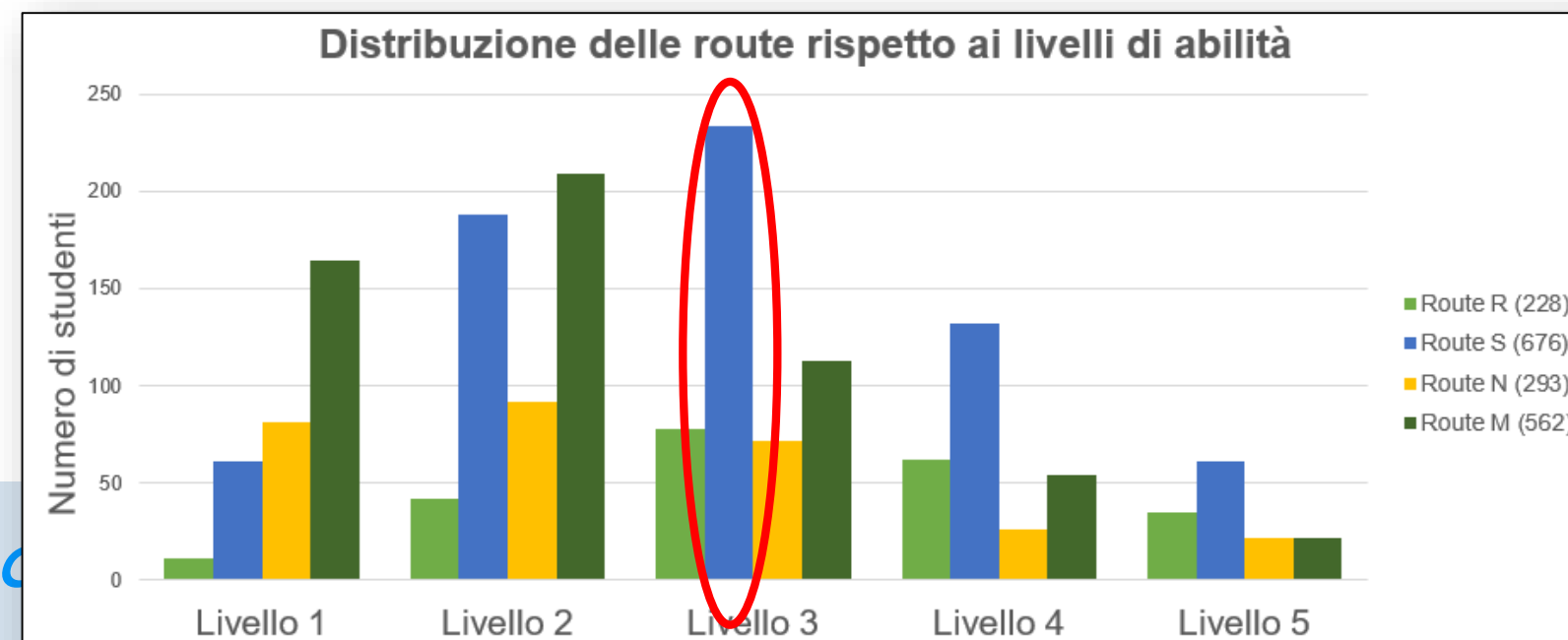
Quale intreccio?

Didattica della matematica & valutazione

- Esigenza di introdurre un “*partial credit*”? (un punteggio parziale nella correzione delle risposte?)

Didattica della matematica

- Esigenza di introdurre un “*partial credit*” (correzione delle risposte?)
- Implicazioni per la descrizione dei livelli: il loro raffinamento (più legato ai processi e meno alle specifiche domande utilizzate per individuarli, anche in relazione agli obiettivi delle *Indicazioni Nazionali*)





UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Quale intreccio?

Didattica della matematica & valutazione

- Esigenza di introdurre un “*partial credit*”? (un punteggio parziale nella correzione delle risposte?)
- Implicazioni per la descrizione dei livelli: il loro raffinamento (più legato ai processi e meno alle specifiche domande utilizzate per individuarli, anche in relazione agli obiettivi delle *Indicazioni Nazionali*)
- Il ruolo delicato dello scopo della domanda (es.: $(B:2)+B+(5+5)$; $[b+(b*2)]*h/2$)
 - In che misura incide nella correzione?



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Quale intreccio?

Didattica della matematica & valutazione

- Esigenza di introdurre un “*partial credit*”? (un punteggio parziale nella correzione delle risposte?)
 - Implicazioni per la descrizione dei livelli: il loro raffinamento (più legato ai processi e meno alle specifiche domande utilizzate per individuarli, anche in relazione agli obiettivi delle *Indicazioni Nazionali*)
 - Il ruolo delicato dello scopo della domanda (es.: $(B:2)+B+(5+5)$; $[b+(b*2)]*h/2$)
 - In che misura incide nella correzione?
- Didatticamente, vediamo quanto possa essere importante lavorare sulle formule come strumenti per **mettere in relazione** e non semplici regole o procedure, da imparare a memoria per ottenere un risultato (solo numerico).



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

stefania.pozio@invalsi.it
francesca.ferrara@unito.it

Valutazione e didattica lavorano in modo integrato, *arricchendo*, da un lato, la nostra comprensione delle abilità matematiche (specifiche) dei nostri studenti (e dunque delle loro necessità didattiche) e, dall'altro lato, lo sviluppo di strumenti e metodi di valutazione attenti *anche ai processi*.

GRAZIE!

