

Il modello probabilistico: un ponte tra incertezza e razionalità

Dalla Scuola primaria alla Secondaria: ricerca didattica e risultati delle Prove INVALSI

11 NOVEMBRE 2020

DOMINGO PAOLA
Esperto INVALSI
Liceo "G.Bruno" di Albenga
www.matematica.it/paola

STRUTTURA DELLA RELAZIONE

**Pensiero probabilistico e
competenze di cittadinanza**

**Alcune difficoltà a condividere
la razionalità del modello
probabilistico:**

- **la voce della ricerca didattica**
- **le risposte alle domande delle
prove INVALSI**

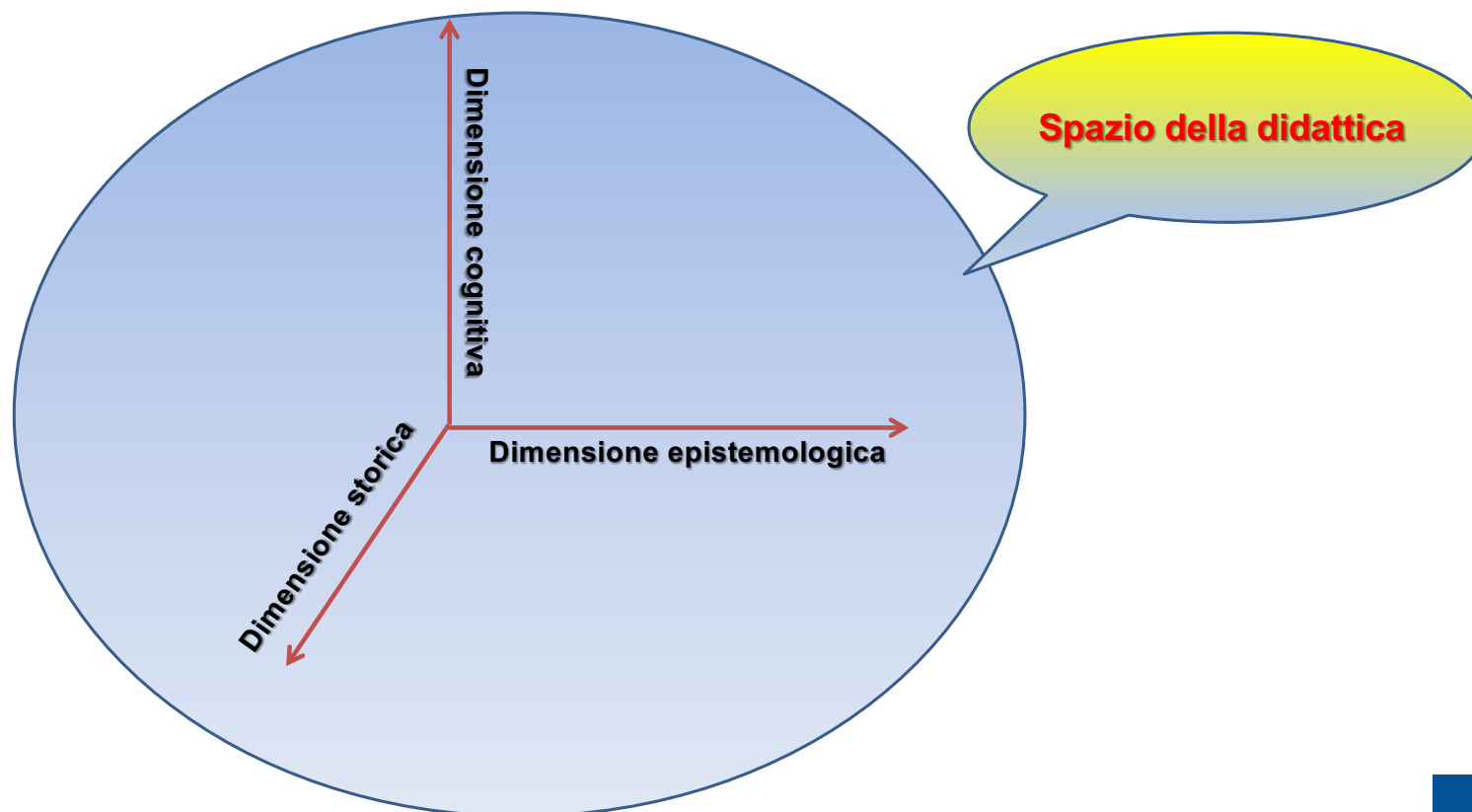
**Alcune riflessioni conclusive
e discussione**



Pensiero probabilistico e competenze di cittadinanza

| | | |
|----|--|--|
| 01 | Indicazioni curriculari di ogni ciclo scolastico e quadro di riferimento INVALSI | L'alunno analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni ... Nelle situazioni di incertezza si orienta con valutazioni di probabilità. |
| 02 | PISA (<u>Programme for International Student Assessment</u>) | La società dell'informazione, l'incertezza, i dati e il caso |
| 03 | Progetti vari sorti nell'ambito di iniziative regionali all'incertezza | Educare all'incertezza - Competenze statistiche per l'esercizio di una cittadinanza attiva (ex IRRE Emilia Romagna) |
| 04 | Interesse delle istituzioni e dei ricercatori in didattica della matematica | «Matematica per il cittadino», Matematica 2001-2003-2004, piano m@t.abel, interesse della ricerca per i problemi dell'insegnamento – apprendimento della probabilità |

Difficoltà a condividere la razionalità del modello probabilistico: la ricerca didattica



Difficoltà a condividere la razionalità del modello probabilistico: la dimensione epistemologica



1

Che cos'è la probabilità?

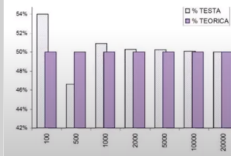
Probabilità di che cosa?



La probabilità è sempre condizionata, perché riferita allo stato attuale delle informazioni che il soggetto che valuta ha sull'evento



Approccio classico: rapporto fra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili (purché equiprobabili)



Approccio frequentista: se si lancia una moneta un gran numero di volte, la **probabilità** di uno scarto significativo tra la frequenza relativa osservata dell'evento "esce T" e la sua probabilità teorica diminuisce all'aumentare del numero dei lanci e tende a 0 per il numero di lanci che tende all'infinito.



Approccio soggettivista: la probabilità di un evento E è il rapporto fra il prezzo C che un individuo coerente è disposto a scommettere e la somma S che ha diritto di avere in cambio se l'evento si verifica



Approccio assiomatico: caratterizza implicitamente la probabilità di un evento come ciò che soddisfa gli assiomi

Difficoltà a condividere la razionalità del modello probabilistico: la dimensione epistemologica

1

**Che cos'è la
probabilità?**

**Probabilità di che
cosa?**

2

**Che cos'è il
caso?**

3

**Indipendenza
stocastica**

Se

$$\Pr(E|H) = \Pr(E)$$

allora

**E e H sono
indipendenti**

Difficoltà a condividere la razionalità del modello probabilistico: la dimensione storica

1

Perché la “scienza del caso” emerge con un ritardo millenario rispetto a quelle dello “spazio” e del “numero”?

2

La difficoltà a organizzare il mondo delle possibilità, cioè ciò su cui abbiamo carenza di informazioni

Difficoltà a condividere la razionalità del modello probabilistico: la dimensione cognitiva

1

Il caso agisce secondo giustizia: punisce o premia

È possibile condizionare il caso mediante riti propiziatori, manifestazioni intense di volontà ...

2

Il caso ha memoria

Agisce in modo da riequilibrare serie di eventi che si discostano dalle attese

La legge empirica del caso

3

Pensare che non sia possibile effettuare valutazioni in condizioni di incertezza e ordinarle

Difficoltà a condividere la razionalità del modello probabilistico: le risposte ad alcune domande delle prove INVALSI

Domanda 24 grado 5 - 2018

D24. Alcuni bambini giocano con un dado a sei facce non truccato. Vince chi ha scommesso sul numero che è uscito più volte dopo 20 lanci. Dopo ogni lancio, su una tabella, mettono una crocetta (X) vicino al numero che è uscito.

Dopo 17 lanci la situazione è la seguente:



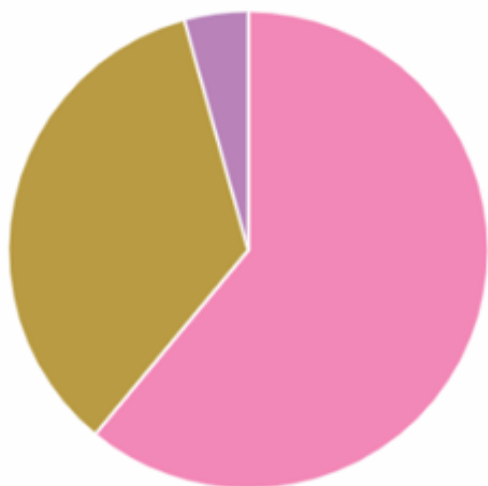
| NUMERO | |
|--------|-----------|
| 1 | X X X |
| 2 | X X |
| 3 | X X X |
| 4 | X X X X X |
| 5 | X |
| 6 | X X X |

Al diciottesimo lancio del dado quale numero ha più probabilità di uscire?

- A. Il 4 perché è uscito più volte nei lanci precedenti
- B. Il 5 perché è uscito meno volte nei lanci precedenti
- C. Nessuno perché in ogni lancio tutti i numeri hanno la stessa probabilità di uscire
- D. Il 3 perché è un numero fortunato

Domanda 24 grado 5 - 2018

Risultati nazionali



Risposte corrette: 61,0%

Risposte errate: 34,7%

Risposte mancanti: 4,3%

D24. Alcuni bambini giocano con un dado a sei facce non truccato. Vince chi ha scommesso sul numero che è uscito più volte dopo 20 lanci. Dopo ogni lancio, su una tabella, mettono una crocetta (X) vicino al numero che è uscito.

Dopo 17 lanci la situazione è la seguente:



| NUMERO | |
|--------|-----------|
| 1 | X X X |
| 2 | X X |
| 3 | X X X |
| 4 | X X X X X |
| 5 | X |
| 6 | X X X |

b. Al diciottesimo lancio del dado quale numero ha più probabilità di uscire?

- A. Il 4 perché è uscito più volte nei lanci precedenti **19,8%**
- B. Il 5 perché è uscito meno volte nei lanci precedenti **11,2%**
- C. Nessuno perché in ogni lancio tutti i numeri hanno la stessa **61%** probabilità di uscire
- D. Il 3 perché è un numero fortunato **3,7%**

Domanda 12 grado 8 - 2015

Nel gioco del superenalotto ogni giocatore sceglie almeno sei numeri interi compresi tra 1 e 90. Gli organizzatori estraggono a caso sei numeri, sempre compresi tra 1 e 90. Vincono i giocatori che hanno scelto proprio gli stessi numeri estratti dagli organizzatori del gioco.

Sara ha scelto i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6.

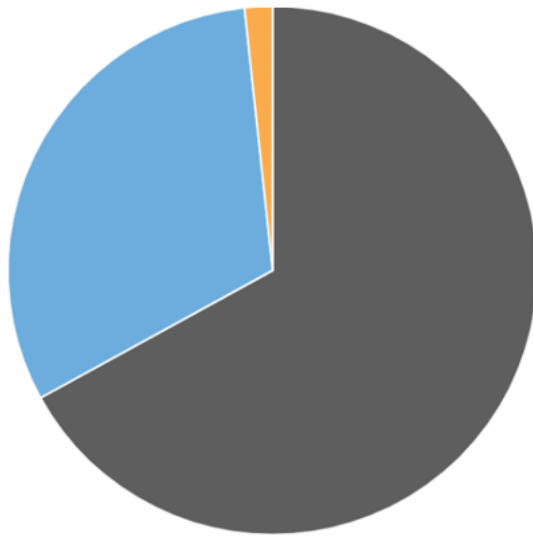
Guglielmo ha scelto i numeri 7, 12, 15, 23, 28, 34.

Sara e Guglielmo hanno la stessa probabilità di vincere?

- A. No, perché i numeri scelti da Sara sono consecutivi
- B. Sì, perché tutti i numeri hanno la stessa probabilità di essere estratti
- C. No, perché Sara e Guglielmo non hanno scelto gli stessi numeri
- D. Sì, perché non conosciamo i numeri usciti nelle estrazioni precedenti

Domanda 12 grado 8 - 2015

Risultati nazionali



Risposte corrette: 67,0%
Risposte errate: 31,3%
Risposte mancanti: 1,7%

Nel gioco del superenalotto ogni giocatore sceglie almeno sei numeri interi compresi tra 1 e 90. Gli organizzatori estraggono a caso sei numeri, sempre compresi tra 1 e 90. Vincono i giocatori che hanno scelto proprio gli stessi numeri estratti dagli organizzatori del gioco.

Sara ha scelto i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Guglielmo ha scelto i numeri 7, 12, 15, 23, 28, 34.

Sara e Guglielmo hanno la stessa probabilità di vincere?

- A. No, perché i numeri scelti da Sara sono consecutivi **18%**
- B. Sì, perché tutti i numeri hanno la stessa probabilità di essere estratti **67%**
- C. No, perché Sara e Guglielmo non hanno scelto gli stessi numeri **6,7%**
- D. Sì, perché non conosciamo i numeri usciti nelle estrazioni precedenti **6,6%**

Domanda 18 grado 10 - 2015

Nel foglietto illustrativo contenuto nella confezione di un farmaco, alla voce “Effetti collaterali” si legge che:

- il 2% dei pazienti trattati con il farmaco ha accusato vertigini;
- il 7% dei pazienti trattati con il farmaco ha avuto bruciori di stomaco.

I due tipi di effetti collaterali sono indipendenti l'uno dall'altro.

- a. Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco non abbia bruciori di stomaco? Esprimi il risultato in forma percentuale.

Risposta:⁹³..... %

- b. Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco manifesti entrambi gli effetti collaterali?

- A. 9%
- B. 0,14%
- C. 14%
- D. 0,9%

Domanda 18 grado 10 - 2015

Risultati nazionali

Nel foglietto illustrativo contenuto nella confezione di un farmaco, alla voce “Effetti collaterali” si legge che:

- il 2% dei pazienti trattati con il farmaco ha accusato vertigini;
- il 7% dei pazienti trattati con il farmaco ha avuto bruciori di stomaco.

I due tipi di effetti collaterali sono indipendenti l'uno dall'altro.

a. Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco non abbia bruciori di stomaco? Esprimi il risultato in forma percentuale.

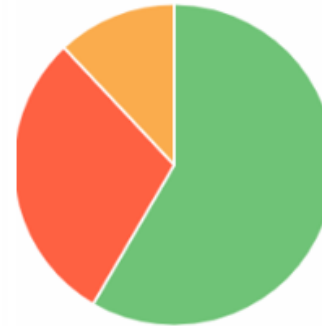
Risposta:**93**..... % **58,4 %**

b. Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco manifesti entrambi gli effetti collaterali?

- A. 9% **43,7%**
- B. 0,14% **19,4 %**
- C. 14% **6,4%**
- D. 0,9% **24,6%**

Primo quesito (a)

Risposte corrette



Risposte corrette: 58,4%
Risposte errate: 29,6%
Risposte mancanti: 12,0%

Secondo quesito (b)

Risposte corrette



Risposte corrette: 19,4%
Risposte errate: 74,7%
Risposte mancanti: 5,9%

Domanda rilasciata dal PISA: Terremoti

Stimolo

È stato trasmesso un documentario sui terremoti e sulla frequenza con cui si verificano. Tale documentario comprendeva un dibattito sulla prevedibilità dei terremoti.

Un geologo ha dichiarato: «Nei prossimi venti anni, la probabilità che un terremoto si verifichi a Zedopoli è due su tre».

Domanda

Quale delle seguenti affermazioni esprime meglio il significato di ciò che ha detto il geologo?

- A. Dato che $\frac{2}{3} \times 20 = 13,3$, tra il 13° e il 14° anno da oggi ci sarà un terremoto a Zedopoli.
- B. $\frac{2}{3}$ è maggiore di $\frac{1}{2}$, pertanto ci sarà senza dubbio un terremoto a Zedopoli durante i prossimi 20 anni.
- C. La probabilità che a Zedopoli vi sia un terremoto durante i prossimi 20 anni è maggiore della probabilità che non vi siano terremoti.
- D. E' impossibile dire che cosa accadrà, perché nessuno può essere certo di quando si verificherà un terremoto.

Domanda rilasciata dal PISA: Terremoti

È stato trasmesso un documentario sui terremoti e sulla frequenza con cui si verificano. Tale documentario comprendeva un dibattito sulla prevedibilità dei terremoti.

Un geologo ha dichiarato: «Nei prossimi venti anni, la probabilità che un terremoto si verifichi a Zedopoli è due su tre».

Domanda

Risultati nel campione italiano

Quale delle seguenti affermazioni esprime meglio il significato di ciò che ha detto il geologo?

- A. Dato che $\frac{2}{3} \times 20 = 13,3$, tra il 13° e il 14° anno da oggi ci sarà un terremoto a Zedopoli.
- B. $\frac{2}{3}$ è maggiore di $\frac{1}{2}$, pertanto ci sarà senza dubbio un terremoto a Zedopoli durante i prossimi 20 anni.
- C. La probabilità che a Zedopoli vi sia un terremoto durante i prossimi 20 anni è maggiore della probabilità che non vi siano terremoti.
- D. E' impossibile dire che cosa accadrà, perché nessuno può essere certo di quando si verificherà un terremoto.

9,6%

9,5%

42,6%

22,1%

Non valide od Omesse 9,6% Non raggiunte 6,6%

Domanda posta a studenti del corso di scienze di formazione primaria

Nel gioco del Superenalotto (in cui si vince se si indovinano 6 numeri tra 1 e 90, successivamente estratti) conviene di più giocare la sestina (1, 2, 3, 4, 5, 6) oppure la sestina (7, 18, 32, 51, 67, 83)? O è indifferente? Giustificare la risposta.

Domanda posta a studenti del corso di scienze di formazione primaria

Nel gioco del Superenalotto (in cui si vince se si indovinano 6 numeri tra 1 e 90, successivamente estratti) conviene di più giocare la sestina (1, 2, 3, 4, 5, 6) oppure la sestina (7, 18, 32, 51, 67, 83)? O è indifferente? Giustificare la risposta.

Il 38% circa dichiara che è più probabile che esca la seconda sestina

- è più difficile che escano a caso sei numeri consecutivi
- il caso si distribuisce su tutti i 90 numeri e non solo sui primi sei
- con la prima sestina è come se il caso si ostinasse a far venire fuori numeri piccoli e allora il caso non sarebbe più casuale.

Alcune riflessioni conclusive

Affinché gli studenti possano interiorizzare forme di pensiero proprie della razionalità del modello probabilistico è necessario che:

- **la razionalità del modello probabilistico sia legittimata agli occhi degli studenti nelle sue funzioni di previsione e di interpretazione dei fenomeni aleatori**
- **gli studenti siano messi in grado di diventare consapevoli di eventuali forme di pensiero proprie del contesto sociale e culturale extra-scolastico incoerenti con la razionalità del modello probabilistico e siano poi disponibili a metterle in discussione**
- **gli studenti siano messi in grado di affrontare le delicate relazioni fra *dati* e *caso***

Alcune riflessioni conclusive ... e un po' di leggerezza

CAMERA DEI DEPUTATI

Seduta di *omissis*

Interrogazione a risposta immediata n. *omissis* dell'On. *omissis* ed altri sulle iniziative relative ai ritardi verificatisi nelle procedure per il rilascio ed il rinnovo del permesso di soggiorno. Interviene *omissis*

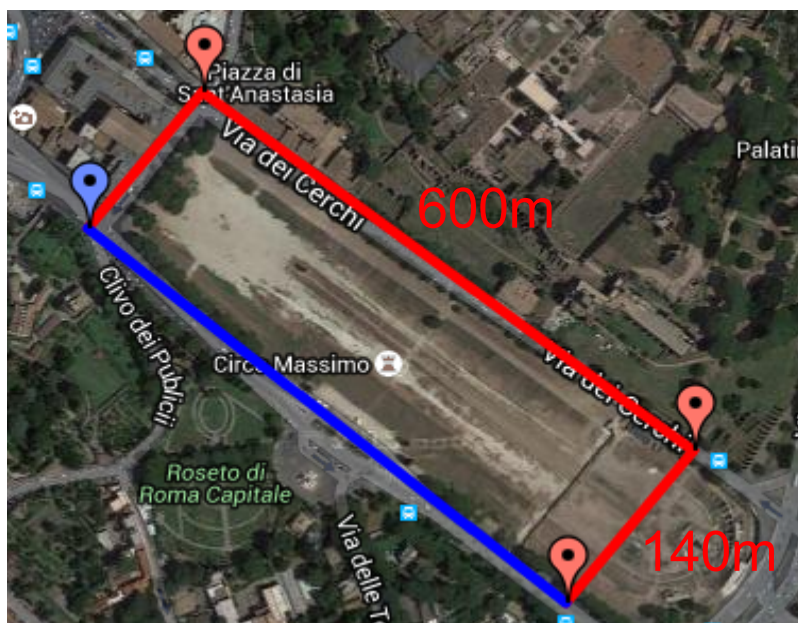
[...] Inoltre, i tempi medi assoluti di conclusione del procedimento si sono progressivamente ridotti, si è passati dai 303 giorni del 2007 (tempi medi per il rilascio del permesso) ai 271 del 2008, ai 101 del 2009, con una riduzione del 67 per cento rispetto al 2007 e del 63 per cento rispetto al 2008, quindi, di

oltre il 120 per cento in due anni.

Alcune riflessioni conclusive ... e un po' di leggerezza

Family Day 2016: 2 milioni di persone
al Circo Massimo.

"ascoltate la piazza"



Quante persone per ogni
metro quadrato?

$$6 \cdot 10^2 \cdot 1,4 \cdot 10^2 \approx 10^5 \text{ m}^2$$

$$2 \cdot 10^6 : (10^5) \approx 20 \text{ persone al metro quadrato ...}$$

Alcune riflessioni conclusive ... e un po' di leggerezza



LONDRA - Il tuo corpo è ricoperto interamente di peli? Bene! A meno che tu non sia una scimmia particolarmente dotata, hai una intelligenza superiore alla media. A dirlo è uno studio effettuato dal prof **Aikarakudy Aliàs**, psichiatra presso il **Chester Center of Mental Health**, in Illinois, che da 20 lunghi anni studia le relazioni tra villosità ed intelletto. Per giungere a questa conclusione i ricercatori hanno analizzato i Q.I. di 5000 iscritti al MENSA, una nota associazione internazionale di cui possono essere membri esclusivamente le persone che abbiano un alto livello di QI. *"Dagli esami effettuati su un campione di uomini e donne tra i 20 ed i 55 anni - ci spiega Aliàs - emerge un dato incontrovertibile: quanto più alta è la densità pilifera sul corpo, tanto più alto è il QI del soggetto"*. Le ragioni di una tale relazione, tuttavia, non sono ancora ben chiare agli scienziati.

Hai molti peli? Sei una persona intelligente!

Una correlazione positiva non implica in alcun modo una relazione di causa - effetto



GRAZIE!



La conferenza è dedicata a Bruno Spotorno